МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1979

УДК 533.6.011.8

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

А. К. АРТАМОНОВ, В. Н. АРХИПОВ

(Москва)

Известно, что уравнения Навье – Стокса плохо описывают структуру ударных волн в разреженном газе. В задаче об обтекании сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа это может привести к тому, что решение уравнений Навье – Стокса даст при малых числах Рейнольдса неверные значения параметров в ударном слое перед сферой и на поверхности сферы.

Строгое решение задачи об обтекании сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа в рамках уравнения Больцмана, а также решение этой задачи методом прямого моделирования Монте-Карло трудоемки, особенно при больших числах Маха M_∞ набегающего потока и в области режимов течений, примыкающей к режимам сплошной среды. Поэтому оправданы поиски других путей решения задачи.

В работах [1, 2] рассмотрены задачи о структуре прямой ударной волны и о гиперзвуковом продольном обтекании плоской пластины разреженным газом на основе уравнений, полученных из общего уравнения переноса в предположении, что функция распределения является суперпозицией дельта-функции, описывающей равномерный набегающий поток, в котором тепловыми скоростями молекул можно пренебречь по сравнению со скоростью направленного движения, и функции распределения в приближении Навье – Стокса. Соответственно этому молекулы газа можно разбить на молекулы набегающего потока, концентрация которых уменьшается в направлении потока, и молекулы, описываемые функцией распределения в приближении Навье – Стокса, которые условно можно назвать молекулами «сплошной среды». Так как часть молекул набегающего потока может достигнуть твердой поверхности и отразиться от нее, не столкнувшись с другими молекулами, то в решение входит также функция распределения отраженных от поверхности молекул.

Результаты работ [1, 2] оказались в лучшем соответствии с экспериментальными данными, чем полученные в рамках уравнений Навье – Стокса. Соответствующая теория носит название «пучок – сплошная среда». Решение какой-либо задачи на основе этой теории следует рассматривать как приближенное. Степень приближения можно оценить путем сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными либо же с результатами расчетов, проведенных в более строгой постановке.

В данной работе приводится решение задачи о структуре ударного слоя вблизи критической линии тока около сферы, обтекаемой гиперзвуковым потоком разреженного газа, полученное в рамках уравнений теории пучок – сплошная среда.

1. Основные уравнения. Если принять гипотезу об автомодельности течения вблизи критической линии тока [3], то уравнения, описывающие течение в этой области в рамках теории пучок — сплошная среда, имеют вид

$$\frac{d\rho}{dx}=-\frac{\rho V}{v}-\frac{2\rho(u+v)}{rv}+\frac{1}{v}Q_m$$

$$\frac{d}{dx}(\mu U)=R_\infty\left[\rho vU+\frac{2(p_2-p)+\rho u(u+v)}{r}\right]+\frac{10}{3}\frac{\mu(u+v)}{r^2}+$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{d\mu}{dT}\theta(u+v)-\frac{1}{3}\mu V-2\mu U\right]-R_\infty Q_{i\varphi}$$

$$
\frac{dp_2}{dx}=\frac{\rho u(u+v)}{r}+\frac{\mu}{R_\infty r}\left(\frac{u+v}{r}-U\right)
$$

$$
\frac{dv}{dx}=V,\quad \frac{dh}{dx}=H,\quad \frac{du}{dx}=U,\quad \frac{dT}{dx}=\theta
$$

$$
\frac{dV}{dx}=\frac{3R_\infty}{4\mu}\left\{\sigma A\left[\rho\theta-\frac{\rho VTr+2\rho T(u+v)}{rv}+\frac{T}{v}Q_m\right]+\rho vV\right\}-
$$

$$
-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\theta V+\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\frac{\theta(u+v)}{r}-\frac{U}{2r}+ \tag{1.1}
$$

$$
+\frac{7(u+v)}{2r^2}-\frac{2V}{r}-\frac{3R_\infty}{4\mu}Q_{ir}
$$

$$
\frac{d}{dx}(\mu H)=P\left\{R_\infty\left[\rho vH+\sigma A\rho\left(-\theta v+TV+\frac{2T(u+v)}{r}\right)\right]-\right.
$$

$$
\left.-\mu\left[2V^2+\frac{4}{r^2}(u+v)^2\right]+\frac{2\mu}{3r^2}(rV+2u+2v)^2\right\}-\frac{2\mu H}{r}+\frac{2\mu h}{r^2}+
$$

$$
+R_\infty P(-\sigma ATQ_m+vQ_{ir}-Q_e)
$$

$$
\frac{dn_r}{dx}=-\frac{2n_r}{r}-\frac{1}{u_r}Q_{mr},\quad \frac{dn_b}{dx}=Q_{mb}
$$

$$
\mu=\mu(T),\quad p=\sigma A\rho T,\quad h=c_pT,\quad H=c_p\theta,
$$

$$
\sigma A=\frac{1}{(\gamma-1)M_\infty{}^2},\quad c_p=\frac{c_p{}^*T_\infty{}^*}{v_\infty{}^{*2}}
$$

$$
u^*=v_\infty{}^*u(x)\sin\varphi,\quad v^*=v_\infty{}^*v(x)\cos\varphi
$$

$$
\rho^*=n_{b\infty}{}^*\rho(x),\quad \mu^*=\mu_\infty{}^*\mu(x)\cos\varphi
$$

$$
h^*=v_\infty{}^{*2}[h(x)\cos^2\varphi+h_2(x)\sin^2\varphi]
$$

$$
p^*=n_{b\infty}{}^*m^*v_\infty{}^{*2}[p(x)\cos^2\varphi+p_2(x)\sin^2\varphi]
$$

$$
T^*=T_\infty{}^*[T(x)\cos^2\varphi+T_2(x)\sin^2\varphi]
$$

$$
n_b{}^*=n_{b\infty}{}^*n_b(x),\quad n_r{}^*=n_{b\infty}{}^*n_r(x),\quad u_r{}^*=v_\infty{}^*u_r(x)
$$

Здесь $x^*=xr_w{}^*$ — расстояние от поверхности сферы; $r_w{}^*$ — радиус сферы; u^*, v^* — поперечная и продольная компоненты скорости сплошной среды; ρ^*, h^*, p^*, T^*, μ^* — соответственно плотность, энтальпия, давление, температура и коэффициент вязкости сплошной среды; $R_\infty=n_{b\infty}{}^*v_\infty{}^*r_w{}^*/\mu_\infty{}^*$ — число Рейнольдса; P — число Прандтля; $r^*=rr_w{}^*$; r^*, φ — сферические полярные координаты; $r^*=r_w{}^*+x^*$; $u_b{}^*=v_\infty{}^*$ — скорость частиц набегающего потока; $u_b=u_b{}^*/v_\infty{}^*=1$; $u_r{}^*$ — скорость отраженных частиц; m^* — масса молекулы; $n_b{}^*$, $n_r{}^*$ — концентрации частиц набегающего потока и отраженных от поверхности; $c_p{}^*$ — удельная теплоемкость сплошной среды при постоянном давлении; γ — отношение удельных теплоемкостей.

Индекс ∞ соответствует набегающему потоку, w — поверхности тела; * — размерные величины.

Уравнения (1.1) отличаются от уравнений Навье — Стокса наличием в них слагаемых типа источников, описывающих обмен массой, импульсом и энергией между тремя названными выше классами частиц, а также наличием в системе двух уравнений, описывающих изменение концентраций молекул набегающего потока и отраженных от тела.

Функции Q_m, $Q_{i\varphi}$, Q_{ir}, Q_{mr}, Q_{mb}, Q_e представляют собой интегралы, причем в подынтегральные выражения входят неизвестные до решения задачи температура, скорость и т. д. Для функции распределения, соответствующей набегающему потоку, имеющей вид дельта-функции, и для молекул — «твердых сфер», а также для простого (лучевого) закона отражения молекул от поверхности со скоростью, равной средней тепловой скорости, соответствующей температуре поверхности, могут быть получены явные выражения этих функций через параметры течения (см. [2]).

Граничные условия следующие. При $x\to\infty$ в набегающем потоке

$$\rho=n_r=U=V=H=\theta=0 \tag{1.2}$$
$$u=T=1,\qquad p=p_2=p_\infty,\qquad h=h_\infty,\qquad v=-1$$

При $x=0$ (на поверхности тела) ставятся условия непротекания и скольжения.

2. Метод решения. Систему (1.1) и краевые условия можно записать в виде

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\ldots,y_n),\qquad i=1,\ldots,n$$
$$\varphi_s(x^{(0)},\overset{(0)}{y_1},\ldots,\overset{(0)}{y_n})=0,\qquad s=1,\ldots,m \tag{2.1}$$
$$\varphi_s(x^{(1)},\overset{(1)}{y_1},\ldots,\overset{(1)}{y_n})=0.\qquad s=m+1,\ldots,n$$

В рассматриваемой задаче $x^{(0)}=0$ (поверхность тела), $x^{(1)}=\infty$ (набегающий поток); граничные условия в набегающем потоке при численном решении задачи переносятся на конечное расстояние от тела.

Предположим, что функции f_i и все их частные производные по y_i непрерывно зависят от всех аргументов. Тогда существует единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_j=y_j^{(k)}$ при $x=x^{(k)}$. Пусть это будет решение $y_j=\varphi_j(x;x^{(k)},y_1^{(k)},\ldots,y_n^{(k)})$. При $x=x^{(0)}$, $x^{(1)}$ оно принимает вид

$$\overset{(0)}{y_j}=\psi_j(x^{(0)};x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n}),\qquad \overset{(1)}{y_j}=\psi_j(x^{(1)};x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n})$$

Тогда

$$\varphi_s(x^{(0)},\overset{(0)}{y_1},\ldots,\overset{(0)}{y_n})=$$
$$=\varphi_s(x^{(0)},\psi_1(x^{(0)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n}),\ldots,\ \psi_n(x^{(0)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n}))=$$
$$=\Phi_s(x^{(0)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots.\overset{(k)}{y_n})$$
$$\varphi_s(x^{(1)},\overset{(1)}{y_1},\ldots,\overset{(1)}{y_n})=$$
$$=\varphi_s(x^{(1)},\psi_1(x^{(1)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n}),\ldots,\ \psi_n(x^{(1)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n}))=$$
$$=\Phi_s(x^{(1)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n})$$

и краевые условия могут быть формально записаны в виде

$$\Phi_s(x^{(0)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n})=0\qquad (s=1,\ldots,m) \tag{2.2}$$
$$\Phi_s(x^{(1)},x^{(k)},\overset{(k)}{y_1},\ldots,\overset{(k)}{y_n})=0\qquad (s=m+1,\ldots,n)$$

Систему (2.2) можно рассматривать как систему нелинейных алгебраических уравнений относительно таких значений $y_j^{(k)}$, которые удовлетворяют краевым условиям, и, как таковую, ее можно решать каким-либо приближенным методом, например, методом Ньютона. Значения функций $\Phi_s(x^{(0)}, x^{(k)}, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$, $\Phi_s(x^{(1)}, x^{(k)}, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$ и их производных по $y_j^{(k)}$, нужные при решении системы алгебраических уравнений методом Ньютона, можно получить численно, решив несколько раз систему (2.1) каким-либо методом от различных наборов начальных данных $y_j^{(k)}$ в интервалах $[x^{(k)}, x^{(1)}]$ и $[x^{(k)}, x^{(0)}]$. Точки $(x^{(k)}, y_j^{(k)})$ не должны быть особыми.

3. Результаты расчетов. Решение исходной задачи проводилось по программе, составленной с использованием метода Рунге — Кутта для решения задачи Коши (2.1) и метода Ньютона для решения системы алгебраических уравнений (2.2). В качестве системы (2.1) использовалась система (1.1) или система уравнений Навье — Стокса. Так как краевые точки $x=x^{(0)}$ и $x=x^{(1)}$ являются особыми точками указанных систем уравнений, начальная точка $x=x^{(k)}$ выбиралась внутри ударного слоя.

Расчеты проведены при $M_\infty=10$, $P={}^3/_4$, $\gamma={}^5/_3$ и ${}^7/_5$, $T_w=T_0$ и $T_w=1$ (T_0 — температура торможения в набегающем потоке). Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1—4. Сплошные кривые — результаты решения системы (1.1), штриховые — результаты решения системы уравнений Навье — Стокса.

На фиг. 1, 2 ($T_w=T$, $\gamma={}^5/_3$, $R_\infty=10$) приведены распределения параметров течения в ударном слое. На фиг. 1 n_t — суммарная плотность частиц всех трех видов. На фиг. 2 сплошными кривыми показаны функции $u_t=(n_b+\rho u)/n_t$, $v_t=(\rho v-n_b+n_r u_r)/n_t$.

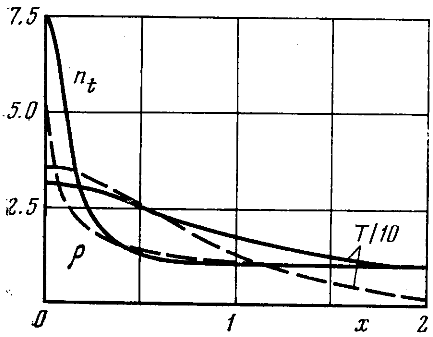
Увеличение поперечного размера области повышенной температуры по сравнению с тем, который дает решение уравнений Навье — Стокса, находится в соответствии с результатами решения задачи о структуре прямой ударной волны в рамках точного и модельных уравнений Больцмана и методом Монте-Карло.

На фиг. 3 приведены зависимости отношения суммарного теплового потока $q^*(K_\infty)$ от частиц сплошной среды, пучка и отраженных от поверхности в критической точке сферы с «холодной» поверхностью ($T_w^*=T_\infty^*$) при $\gamma={}^7/_5$ к свободномолекулярному значению теплового потока, рассчитанному при полной аккомодации энергии, q_{fm}^*. Здесь число Кнудсена $K_\infty=l_\infty^*/r_w^*$; l_∞^* — длина свободного пробега, соответствующая условиям в набегающем потоке. На этой же фигуре приведены результаты расчетов методом прямого моделирования Берда, заимствованные из работы [4] (штрихпунктирная кривая). Результаты решения уравнений теории пучок — сплошная среда находятся в неплохом соответствии с результатами Берда, тогда как уравнения Навье — Стокса дают при $K_\infty\to\infty$ сильно завышенные тепловые потоки.

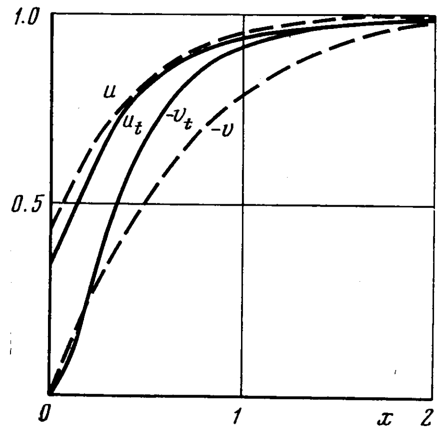
На фиг. 4 приведена зависимость $p_w(R_\infty)$ в критической точке при $\gamma={}^7/_5$ и условии, что поверхность адиабатическая ($T_w^*=T_0^*$). На оси ординат черточкой отмечен свободномолекулярный предел при полной аккомодации энергии, p_{wfm}. При $K_\infty\to\infty$ результаты решения уравнений теории пучок — сплошная среда ближе к свободномолекулярному пределу, чем результаты решения уравнений Навье — Стокса.

Расчеты при числах Рейнольдса $R_\infty>100$ проводились в приближении тонкого ударного слоя методом работы [5]. Полученные при этом результаты практически совпали с результатами решения уравнений Навье — Стокса.

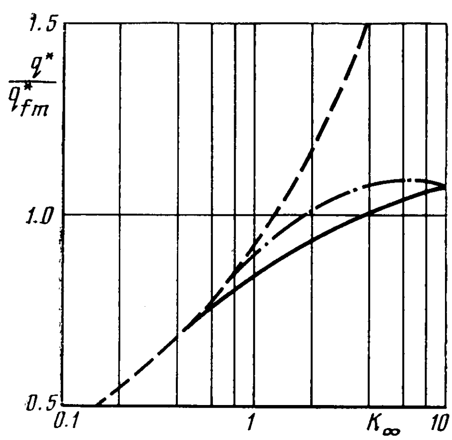
Погрешность, вносимую предположением об автомодельности рассматриваемого течения, которое сводит решение двумерной задачи об обтекании сферы к решению одномерной задачи, можно оценить путем сравнения результатов расчетов, проведенных в рамках уравнений Навье — Стокса с использованием и без использования этого предположения. Особенно интересен интервал чисел $R_\infty<50$, в котором расхождение результатов, полученных на основе теории пучок — сплошная среда и уравнений



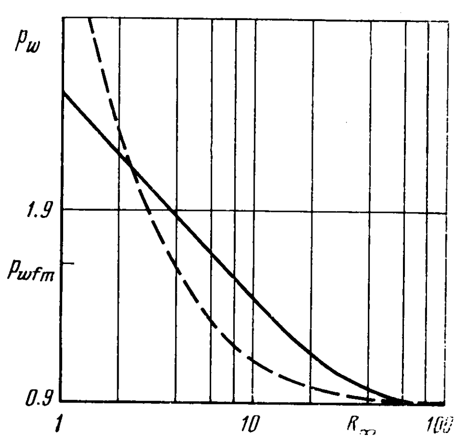
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Навье — Стокса, наибольшее. К сожалению, имеются лишь немногочисленные и отрывочные результаты расчетов двумерного обтекания сферы вязким газом при $20<R_\infty<50$ (без предположения об автомодельности), опубликованные, например, в работах [6, 7]. Кроме того, В. В. Крикунов и Ю. М. Липницкий любезно сообщили нам результаты расчета двумерного обтекания сферы по схеме третьего порядка точности [8] при $M_\infty=2$, $R_\infty=15$. Сравнение с результатами расчетов, проведенных в предположении об автомодельности, показало, что различие результатов решения одномерной и двумерной задач находится приблизительно в пределах 10%. Это не превышает разброса опубликованных в научной литературе результатов расчетов обтекания сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа во всей области режимов обтекания, промежуточной между режимами сплошной среды и свободномолекулярными, полученных различными методами (методы Монте-Карло; решения модельных кинетических уравнений; различные численные схемы решения уравнений Навье—Стокса), а также разброса соответствующих экспериментальных результатов.

Отличие приведенных выше результатов расчета в рамках теории пучок — сплошная среда при $R_\infty<50$, полученных с использованием предположения об автомодельности, от результатов, полученных методом Берда, также не превышает 10%, тогда как при этих же R_∞ результаты решения уравнений Навье — Стокса отличаются от результатов, полученных методом прямого моделирования, гораздо больше. Отсюда следует, что в указанной области применение теории пучок — сплошная среда более оправдано, чем применение уравнений Навье — Стокса.

Поступила 6 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turcotte D. L., Scholnick I. M.* Structure of strong shock waves. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 5, pt 2.
2. *Kot S. C., Turcotte D. L.* Beam-continuum model for hypersonic flow over a flat plate. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 3.
3. *Левинский Е., Иосихара Х.* Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. М., «Мир», 1964.
4. *Jain A. C., Adimurthy V.* Hypersonic merged stagnation shock layers. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 3.
5. *Архипов В. Н., Поленов А. Н.* Обтекание сферы гиперзвуковым потоком вязкого релаксирующего газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3.
6. *Молодцов В. К., Толстых А. И.* О расчете сверхзвукового вязкого обтекания затупленных тел. В сб. Тр. секции по числ. методам в газовой динамике 2-го Междунар. коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, т. 1. М., 1971, ВЦ АН СССР, 1971.
7. *Павлов Б. М.* О решении полных уравнений Навье – Стокса в задачах обтекания затупленных тел. В сб. Тр. секции по числ. методам в газовой динамике 2-го Междунар. коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, т. 1. М., ВЦ АН СССР, 1971.
8. *Еремин В. В., Липницкий Ю. М.* О построении многомерных разностных схем третьего порядка точности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 2.