

**МЕХАНИКА ПОРИСТОЙ ДВУХФАЗНОЙ ВЯЗКО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ  
СРЕДЫ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**А. В. КАРАКИН, Л. И. ЛОБКОВСКИЙ**

(Москва)

Согласно современным геофизическим представлениям [1], океанская кора образуется при раздвижении литосферных плит в осевых частях рифтовых зон Земли в результате внедрения расплавленного вещества астеносферы в трещины и поры литосферы и последующего затвердевания этого вещества (литосфера и астеносфера являются верхними слоями Земли). В этих зонах шириной порядка нескольких десятков километров жидкий магматический расплав пронизывает кристаллический скелет слоя коры, что приводит к необходимости рассматривать указанную область как насыщенную трещиновато-пористую деформируемую среду, допускающую фазовые переходы между скелетом и жидким наполнителем. Следует отметить, что геофизические данные свидетельствуют о том, что аналогичная двухфазная трещиновато-пористая структура среды присуща астеносферному слою Земли (по крайней мере в некоторых районах) и областям высокой тектоно-вулканической активности. Учитывая медленность геологических процессов, можно принять, что скелет двухфазной среды деформируется как сильновязкая несжимаемая ньютоновская жидкость с вязкостью, много большей, чем вязкость наполнителя.

1. Общие принципы механики и термодинамики многофазных гетерогенных сред и, в частности, трещиновато-пористых насыщенных сред изложены в [2-5]. В работах, посвященных трещиновато-пористым средам, в основном имелись в виду приложения к нефтяным, водо- и газонасыщенным пластам осадочного чехла Земли, что и предопределило специфику рассматриваемых сред. Скелет в этих средах чаще всего принимался упругим, вязко-упругим или пластичным, а фазовые переходы либо совсем отсутствовали, либо имели место между насыщающими флюидами [2]. Цель данной статьи состоит в том, чтобы очертить обширную область приложений в геофизике для механики вязкодеформируемых трещиновато-пористых сред с фазовыми переходами между скелетом и насыщающей жидкостью.

Будем считать выполненными основные допущения, касающиеся осреднения микроскопических величин в механике гетерогенных сред [2-5]. Тогда уравнения баланса массы, импульса и энергии для каждой из фаз суть следующие:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(m^{(k)}\rho^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(m^{(k)}\rho^{(k)}v_i^{(k)}) = J_{jk} - J_{kj} \quad (k, j=1, 2) \\
 & \frac{\partial}{\partial x_j}(m^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)}) - F_i^{(k)} + m^{(k)}\rho^{(k)}g_i = 0, \quad \sigma_{ij}^{(2)} = -p^{(2)}\delta_{ij} \\
 & \frac{\partial}{\partial t}(m^{(k)}\rho^{(k)}u^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(m^{(k)}\rho^{(k)}u^{(k)}v_i^{(k)} + m^{(k)}q_i^{(k)} - m^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)}v_j^{(k)}) - \\
 & - J_{jk}u^{(jk)} + J_{kj}u^{(kj)} + W^{(k)} - q^{(jk)} - m^{(k)}q^{(k)} - m^{(k)}\rho^{(k)}g_i v_i^{(k)} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь  $\rho^{(k)}, v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, p^{(k)}, q_i^{(k)}, q^{(k)}$  — соответственно плотность, скорость, тензор напряжений, давление, тепловой поток и плотность тепловых источников  $k$ -й фазы, 1 и 2 — сильно- и маловязкая фазы,  $m^{(k)} = \Delta V^{(k)}/\Delta V$ ,  $\Delta V^{(k)}$  — элементарный объем  $k$ -й фазы,  $\Delta V = \Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)}$  — элементарный объем двухфазной среды,  $m^{(2)} \equiv m$  — пористость среды,  $J_{jk}$  — неотрицательные скорости фазовых превращений  $j \rightarrow k$  ( $J_{ii} = 0$ ),  $p^{(2)} \equiv p$ ,  $g_i$  — ускорение силы тяжести,  $u^{(k)}$  — средняя внутренняя энергия  $k$ -й фазы, отнесенная к единице массы,  $u^{(jk)}$  — внутренние энергии масс, терпящих превращения  $j \rightarrow k$ . Если один из повторяющихся индексов заключен в скобки, то суммирование по повторяющимся индексам не производится.  $W^{(k)}$  — работа поверхностных сил на межфазной границе,  $q^{(jk)}$  — кондуктивный тепловой поток  $k$ -й фазы через межфазную границу,  $F_i^{(k)}$  — сила межфазного взаимодействия.

Очевидно, что

$$(1.2) \quad F_i^{(1)} + F_i^{(2)} = 0, \quad W^{(1)} + W^{(2)} = 0, \quad q^{(12)} + q^{(21)} = 0$$

Уравнения (1.1), (1.2) носят достаточно общий характер. Специфика трещиновато-пористой среды отражена в тех соотношениях, которые связывают величины  $F_i^{(k)}$ ,  $W^{(k)}$ ,  $u^{(jk)}$  и тензор полных напряжений двухфазной среды  $\sigma_{ij}$  со средними наблюдаемыми величинами. Как известно [3]

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(f)} - p\delta_{ij}$$

где  $\sigma_{ij}^{(f)}$  — тензор эффективных (фиктивных) напряжений, которые обуславливают перестройку скелета.

В соответствии со смыслом (1.3) именно давление  $p$  обуславливает объемное сжатие в обеих фазах и изменение точки плавления. В условиях Земли на компоненту  $p$  приходится основная часть гидростатического давления. Напряжения  $\sigma_{ij}^{(f)}$  малы по сравнению с  $p$ .

Для силы  $F_i^{(2)}$  и работы  $W^{(2)}$  будем использовать следующие феноменологические соотношения:

$$(1.4) \quad F_i^{(2)} = R_i - p \frac{\partial m}{\partial x_i}$$

$$(1.5) \quad W^{(2)} = p \frac{\partial m}{\partial t} + R_i v_i^{(1)} - \frac{p}{\rho^{(1)}} (J_{12} - J_{21})$$

где  $R_i$  — сила вязкого трения на межфазной границе. Соотношение (1.4) выводится в пренебрежении пульсациями давления из микроскопических уравнений [5]. Соотношение (1.5) впервые получено авторами из микроскопических уравнений при тех же предположениях.

Примем допущение [5], что при  $k \rightarrow j$ -превращениях  $k$ -я фаза принимает на себя излишек (или недостаток) энергии, связанный с фазовым переходом некоторой массы, а остальная часть энергии, необходимая для доведения этой массы до состояния  $j$ -й фазы, затрачивается (поглощается) самой  $j$ -й фазой. Тогда для величин  $u^{(jk)}$  получаются соотношения (1.3.30) работы [5].

2. Используя стандартную процедуру, с учетом гипотез аддитивности и локального термодинамического равновесия получим выражение для производства энтропии  $\sigma$ :

$$\sigma = I_{\tau}^{ij} X_{\tau}^{ij} + \sum_{k=1} I_{(k)} X_{(k)} + \sum_{k=1} I_{(k)} X_{(k)}$$

$$\begin{aligned}
 X_{\tau}^{ij} &= \frac{\tau_{ij}^{(f)}}{T^{(1)}}, \quad I_{\tau}^{ij} = \frac{1}{2} \left( \dot{\gamma}_{ij}^{(1)} - \frac{1}{3} \dot{\gamma}_{hk}^{(1)} \delta_{ij} \right), \quad \dot{\gamma}_{ij}^{(1)} = \left( \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) \\
 X_{(1)} &= \text{grad} \frac{1}{T^{(1)}}, \quad I_{(1)} = m^{(1)} \mathbf{q}^{(1)}, \quad X_{(2)} = \text{grad} \frac{1}{T^{(2)}}, \quad I_{(2)} = m^{(2)} \mathbf{q}^{(2)} \\
 (2.1) \quad X_{(3)} &= \frac{\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}}{T^{(2)}}, \quad I_{(3)} = \mathbf{R}, \quad X_{(4)} = \frac{T^{(2)} - T^{(1)}}{T^{(2)} T^{(1)}}, \quad I_{(4)} = q^{(12)} \\
 X_{(2)} &= p^{(f)}, \quad I_{(2)} = \frac{\dot{\gamma}_{hk}^{(1)}}{2}, \quad X_{(3)} = \left( s^{(1)} - s^{(2)} + \frac{i_s^{(2)} - i^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{i_s^{(1)} - i^{(2)}}{T^{(2)}} \right) \\
 I_{(3)} &= J_{21}, \quad X_{(4)} = \left( s^{(2)} - s^{(1)} + \frac{i_s^{(1)} - i^{(2)}}{T^{(2)}} - \frac{i_s^{(2)} - i^{(1)}}{T^{(1)}} \right), \quad I_{(4)} = J_{12}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{ij}^{(f)}$ ,  $p^{(f)}$  — девиаторная и шаровая части тензора  $\sigma_{ij}^{(f)}$ ;  $T^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$ ,  $i^{(k)}$  — температура, удельные энтропия и энтальпия  $k$ -й фазы,  $i_s^{(k)}$  — энтальпия равновесного состояния  $k$ -й фазы, отвечающая фазовому переходу.

В соответствии с принципом Кюри связи между термодинамическими силами и потоками в изотропных средах выражаются с помощью линейных уравнений Онсагера с учетом симметрии кинетических коэффициентов

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad I_{\tau}^{ij} &= L_{\tau} X_{\tau}^{ij}, \quad I_{(i)} = \sum_{k=1}^3 L_{ik}^{(v)} X_{(k)}, \quad I_{(i)} = \sum_{k=1}^4 L_{ik}^{(s)} X_{(k)} \\
 L_{ik}^{(v)} &= L_{ki}^{(v)}, \quad L_{ik}^{(s)} = L_{ki}^{(s)}
 \end{aligned}$$

Скорости и деформации скелета отождествляются со скоростями и деформациями двухфазной среды. Обозначая последние соответствующими символами без верхнего индекса и пренебрегая в (2.2) перекрестными эффектами, получаем реологическое уравнение и закон Дарси — Герсеванова

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \tau_{ij}^{(f)} &= \eta_1 \left( \dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\gamma}_{hk} \delta_{ij} \right), \quad p^{(f)} = -\eta_2 \dot{\gamma}_{hk}, \quad \mathbf{R} = r (\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}) \\
 \eta_1 &= \frac{L_{\tau}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{L_{22}^{(s)}}{2}, \quad r = \frac{L_{33}^{(v)}}{T^{(2)}} = \frac{m^{(2)} \eta^{(2)}}{K}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  — соответственно коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости,  $r$  — коэффициент Дарси,  $\eta^{(2)}$  — вязкость насыщающей поры жидкости,  $K$  — проницаемость среды.

Объемная вязкость, фигурирующая в реологическом уравнении (2.3), появляется в результате расширения вязкого скелета двухфазной среды благодаря внедрению в него поровой жидкости. Близкие по своей физической природе явления, вероятно, происходят при режеляции или деформациях таящего льда [6], где допустимо не только расширение, но и сжатие скелета. Ранее объемная вязкость в твердых телах исследовалась либо в связи с затеканием пор при сжатии материалов (например, бетона), либо в эффекте дилатансии среды при специфических деформациях трещин [7, 8]. Перекрестные эффекты для векторных величин изучались в [3]. Специфика данной работы состоит в том, что диссипативный процесс сжатия или расширения скелета связан с фазовыми переходами между скелетом и жидкостью. Поэтому естественно ожидать, что между скалярными диссипативными процессами возникнут перекрестные эффекты, описываемые кинетическими коэффициентами  $L_{ik}^{(s)}$ .

3. При решении механических задач используется уравнение баланса сил:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_i g_i = 0$$

где  $\rho_1$  — плотность двухфазной среды. Для простоты будем считать, что

$$(3.2) \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho_1, \quad \delta = \eta^{(2)}/K = \text{const}, \quad m \ll 1$$

Закон Дарси записывается в виде

$$(3.3) \quad p = p^{(s)} + \rho_1 g \varphi, \quad \frac{\partial p^{(s)}}{\partial x_i} = \rho_1 g_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\delta}{\rho_1 g} j_i, \quad j_i = m v_i^{(2)}$$

где  $\varphi$  — пьезометрический напор,  $j_i$  — фильтрационный поток.

Учитывая (3.2), из уравнений непрерывности фаз (1.1) получаем

$$(3.4) \quad \text{div } \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

Уравнения (1.1), (1.3), (2.3), (3.1) — (3.4) преобразуются к виду

$$(3.5) \quad \Delta \mathbf{v} = q^2 \mathbf{v}, \quad \Delta \varphi = \frac{\delta}{\rho_1 g} \mathbf{v}, \quad q^2 = \frac{\delta}{2(\eta_2 + \frac{2}{3}\eta_1)}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$  — скорость объемного расширения.

Иногда бывает целесообразно разложить  $v_i$  и  $\sigma_{ij}^{(f)}$  на соленоидальную и потенциальную компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{v}^{(p)}, \quad \mathbf{v}^{(s)} = \text{rot } \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{v}^{(p)} = \text{grad } \varphi^*, \quad \text{div } \mathbf{v}^{(p)} = \mathbf{v} \\ \sigma_{ij}^{(f)} &= \tau_{ij}^{(f)} - p^{(f)} \delta_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(p)}, \quad \tau_{ij}^{(f)} = \tau_{ij}^{(s)} + \tau_{ij}^{(p)}, \quad p^{(f)} = p^{(s)} + p^{(p)} \\ \tau_{ij}^{(s)} &= \eta_1 \left( \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_i} \right), \quad \tau_{ij}^{(p)} = 2\eta_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} \mathbf{v} \delta_{ij} \right) \\ p^{(p)} &= -2\eta_2 \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{ij}^{(f)}$  — девиатор тензора  $\sigma_{ij}^{(f)}$ ;  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\varphi^*$  — векторный и скалярный потенциалы течения.

Для тонких оболочек удобно разложить соленоидальную компоненту на нормальную и тангенциальную составляющие  $\mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{v}^{(t)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(s)} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(t)}$ . Компонента  $(t)$  по определению удовлетворяет однородным определяющим уравнениям и неоднородным граничным условиям:

$$(3.6) \quad \frac{\partial \tau_{ij}^{(t)}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{(t)}}{\partial x_i} = 0, \quad \tau_{ij}^{(t)} = \eta_1 \left( \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(t)}}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial x_i} = 0$$

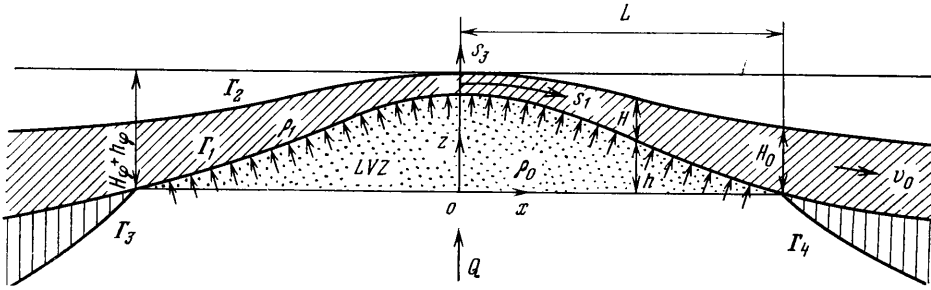
$$(3.7) \quad v_n^{(t)} = 0, \quad \tau_{nm}^{(t)} = -(\tau_{nm}^{(n)} + \tau_{nm}^{(p)}), \quad x_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$$

Здесь  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — нижняя и верхняя границы оболочки, индексы  $n$  и  $t$  означают нормальную и тангенциальную компоненты векторов и тензоров. Смысл разбиения величин на  $(p)$ - и  $(t)$ -компоненты состоит в том, что для каждой из указанных компонент производится свое асимптотическое разложение. Кроме того, для  $(p)$ - и  $(t)$ -компонент имеем замкнутые группы определяющих уравнений, что облегчает процесс интегрирования.

С помощью (3.3), (3.5), (3.6) уравнения (1.1) и (3.1) можно преобразовать к виду

$$(3.8) \quad \eta_1 \Delta v_i^{(n)} + 2 \left( \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(t)}}{\partial x_i} - \rho_1 g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

Применим полученные результаты для анализа движения двухфазного слоя коры в рифтовых зонах. Сверху слой коры покрыт непроницаемой для расплава тонкой пленкой, которая образуется при соприкосновении расплава с океанской водой. Магматическим резервуаром, питающим кору, является подстилающая коровый слой область интенсивного подплавления материала (зона *LVZ*) с эффективной вязкостью, много меньшей вязкости коры. Предполагается, что эта область находится в состоянии гид-



Фиг. 1

ростатического равновесия. Существование питающего резервуара следует предполагать на основании сейсмических данных [9].

Введем ортогональную систему координат  $x, y, z$ , в которой ось  $z$  направлена вертикально вверх. Рассмотрим двухфазную плоскодеформированную задачу в области активного раздвижения коры при  $|x| < L$  (в этой области слой коры совпадает с литосферой). Граничные условия для слоя коры следующие:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} v_n &= \frac{\partial \xi_n^{(1)}}{\partial t}, & \sigma_{nm} &= 0, & \sigma_{nn} &= \rho_0 g h + \text{const}, & \varphi &= 0, & x_i &\in \Gamma_1 \\ v_n &= \frac{\partial \xi_n^{(2)}}{\partial t}, & \sigma_{nm} &= 0, & \sigma_{nn} &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0, & x_i &\in \Gamma_2 \end{aligned}$$

Здесь  $\partial \xi_n^{(i)} / \partial t$  — смещения границ  $\Gamma_i$  в нормальном направлении;  $\rho_0$  и  $h$  — плотность и толщина зоны *LVZ*.

Совместим плоскость  $(x, y)$  с подошвой зоны *LVZ* (фиг. 1). Интегрируя уравнение для гидростатической компоненты давления (3.3), имеем

$$(3.10) \quad p^{(s)} = \rho_1 g (h_\varphi + H_\varphi - z)$$

Горизонталь  $z = h_\varphi + H_\varphi$  соответствует уровню некоторой воображаемой фреатической плоскости. Пусть  $H$  — толщина слоя коры, тогда константам  $h_\varphi$  и  $H_\varphi$  можно приписать значения  $h$  и  $H$ , при которых указанная фреатическая плоскость пересекает границу  $\Gamma_2$ . В данной постановке задачи всегда выполняется условие  $h + H \leq h_\varphi + H_\varphi$ .

Течение является симметричным относительно оси  $z$ . Поэтому граничные условия на левой и правой боковых границах  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  симметричны  $H \langle \sigma_{nn} \rangle = N, x_i \in \Gamma_3, \Gamma_4$  (скобки  $\langle \rangle$  означают осреднение по поперечному сечению слоя).

Слой коры является тонким и слабоизогнутым:

$$(3.11) \quad \varepsilon \equiv \frac{H_a}{L} \ll 1, \quad \frac{dH}{dx} \ll 1, \quad \frac{dh}{dx} \ll 1$$

где  $H_a$  — среднее значение  $H$ .

Введем криволинейную систему координат  $s_1, s_2, s_3$ , такую, что  $s_2 \equiv y, s_3 \equiv 0$  есть уравнение срединной поверхности слоя. Условие (3.11) озна-

чает, что новая система координат является «почти декартовой». Примем ряд допущений, которые аналогичны некоторым положениям гипотезы Лява — Кирхгофа для тонких упругих оболочек или следствиям из нее. Будем считать, что

$$(3.12) \quad \sigma_{13} \ll \sigma_{11}, \quad \sigma_{33}, \quad \frac{\partial}{\partial s_1} \ll \frac{\partial}{\partial s_3}$$

С учетом соотношений (3.12) уравнения (3.5) упрощаются к виду

$$(3.13) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s_3^2} = q^2 v, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_3^2} = \frac{\delta}{\rho_1 g} v, \quad \frac{\partial v_z^{(p)}}{\partial s_3} = v$$

В приближении тонкой оболочки третье условие (3.9) сводится к соотношениям изостазии

$$(3.14) \quad \sigma_{nn} = -\rho_1 g H, \quad s_i \in \Gamma_1, \quad \rho_0 g h + \rho_1 g H = \rho_0 g h_\varphi + \rho_1 g H_\varphi$$

С помощью (3.10), (3.14) граничные условия для нормальных напряжений в (3.9) можно записать в виде

$$(3.15) \quad \rho_0 (\sigma_{nn} + p^{(s)}) = \rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g (H_\varphi - H), \quad s_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$$

4. При раскалывании континентальных плит образуются рифты типа рифта Красного моря или оз. Байкал. Для этого случая решается нестационарная горизонтально однородная задача, т. е. предполагается, что  $H = H(t)$ . Совместим ось  $x$  со средней линией слоя коры, имеющего плоскопараллельные границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , и будем считать, что уровень фреатической поверхности поровой жидкости совпадает с верхней границей слоя. Тогда имеем

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v_z &= -\frac{1}{2} \frac{dH}{dt}, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zz} = -\rho_1 g H, \quad \varphi = 0, \quad z = -\frac{H}{2} \\ v_z &= \frac{1}{2} \frac{dH}{dt}, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad p^{(s)} = 0, \quad z = \frac{H}{2} \\ (\sigma_{xx} + p^{(s)}) &= \sigma, \quad x = \pm L \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  — величина растягивающих в горизонтальном направлении нормальных напряжений за вычетом гидростатической составляющей,  $L$  — горизонтальный размер слоя.

По смыслу задачи компонента  $v_i^{(p)}$  ориентирована вертикально, а компонента  $v_i^{(s)}$  связана с однородным растяжением слоя  $v_x^{(p)} = 0$ ,  $v_x = v_x^{(s)} = v$ ,  $\partial v / \partial z = 0$ . Определяющая система уравнений в данном случае упрощается к виду

$$(4.2) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho_1 g = 0, \quad \frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z^{(p)}}{\partial z} = v, \quad \frac{\partial p^{(s)}}{\partial z} = \rho_1 g, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\delta}{\rho_1 g} v$$

Интегрируя (4.2) при условиях (4.1), получаем

$$(4.3) \quad v = c_1 \operatorname{ch} qz + c_2 \operatorname{sh} qz$$

$$(4.4) \quad \varphi = \frac{\delta v}{\rho_1 g q^2} - \frac{\delta}{\rho_1 g q^2} \left[ c_1 \left( qz \operatorname{sh} \frac{qH}{2} + \operatorname{ch} \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} \operatorname{sh} \frac{qH}{2} \right) + \right.$$

$$+c_2 \left( qz \operatorname{ch} \frac{qH}{2} - \operatorname{sh} \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} \operatorname{ch} \frac{qH}{2} \right) ]$$

$$(4.5) \quad \frac{dH}{dt} + H \frac{dv}{dx} = H \langle v \rangle, \quad \langle v \rangle \equiv \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} v(z) dz$$

$$(4.6) \quad c_1 = \frac{qH \langle v \rangle}{2 \operatorname{sh} qH/2}, \quad c_2 = \frac{qH \langle v \rangle}{2 \operatorname{ch} qH/2}$$

$$(4.7) \quad \sigma_{xx} + p^{(s)} = \sigma, \quad \sigma_{zz} + p^{(s)} = 0$$

Используя реологическое соотношение (2.3) и (4.7), нетрудно получить

$$(4.8) \quad 2\eta_1 \frac{dv}{dx} + 2 \left( \eta_2 - \frac{1}{3} \eta_1 \right) v - \rho_1 g \varphi = \sigma$$

$$-2\eta_1 \frac{dv}{dx} + 2 \left( \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \right) v - \rho_1 g \varphi = 0$$

Комбинируя (4.4), (4.5), (4.8), приходим к выражениям

$$(4.9) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_0}{4\eta_1}, \quad \sigma_0 = \sigma + 2\eta_1 v = \text{const}$$

$$(4.10) \quad \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = \frac{\sigma_0 [\eta_1 - (\eta_2 + 2/3 \eta_1) qH \operatorname{cth} qH]}{4\eta_1 (\eta_2 + 2/3 \eta_1) qH \operatorname{cth} qH}$$

$$(4.11) \quad \langle v \rangle = \frac{\sigma_0}{4(\eta_2 + 2/3 \eta_1) qH \operatorname{cth} qH}$$

При растяжении ( $\sigma_0 > 0$ ) толщина  $H$  асимптотически стремится к значению  $H^*$ , которое является корнем уравнения

$$(4.12) \quad (\mu + 2/3) qH \operatorname{cth} qH = 1, \quad \mu = \eta_2 / \eta_1$$

Уравнение (4.12) имеет один действительный корень лишь при условии  $\mu < 1/3$ . Если в процессе раздвижения коры толщина  $H$  случайно окажется больше или меньше  $H^*$ , то с течением времени она будет стремиться к  $H^* \sim 1/q$ . Величина  $q$  зависит только от материальных констант и определяет некоторую фундаментальную длину  $l_0 = 1/q$ . Следует, однако, отметить, что хотя  $l_0 \sim H^*$ , величина  $H^*$  в каждой конкретной задаче все же несколько зависит от краевых условий. Существованием фундаментальной длины можно объяснить наблюдаемое примерное постоянство толщины коры для всех океанов. Полагая  $\sigma_0 = 10^7$  дин/см<sup>2</sup>,  $v = 10^{-7}$  см/сек,  $L = 10^6$  см (эти величины являются характерными для процесса разрастания коры), получаем  $\eta_1 = 2 \cdot 10^{19}$  пуаз, что является разумной оценкой вязкости двухфазной среды коры в рифтовой зоне. Приравнивая  $H^* = 1/q$  и полагая  $H^* = 6$  км (толщина океанской коры),  $\eta_1 = \eta_2 = 2 \cdot 10^{19}$  пуаз, получаем величину гидравлической проводимости коры в рифтовой зоне  $\delta = 3 \cdot 10^8$  CGS.

5. Рассмотрим стационарную горизонтальнонеоднородную задачу для осевых частей срединно-океанских рифтов. В соответствии с идеей применения аналога гипотезы Лява — Кирхгофа следует произвести тейлоровское разложение величин по координате  $z$ , и оставить в разложении ровно столько членов, сколько необходимо для удовлетворения граничных условий. В частности, в разложении для  $v_1^{(n)}$  можно оставить лишь нулевой,

а для  $v_3^{(n)}$  — лишь первый члены разложения:

$$(5.1) \quad v_1^{(n)} = v(s_1), \quad v_3^{(n)} = -\frac{dv}{ds_1} s_3$$

Форма и объем питающей зоны определяются из решения задачи. Однако суммарный объемный поток вещества  $Q$  из недр Земли в эту зону, который целиком идет на образование коры, считается заданным:  $Q = H_0 v_0$ ,  $(H_0, v_0) = (H, v)$  при  $|x| = L$ .

Для компоненты  $(t)$  принимается приближение тонкого слоя, аналогичное тому, которое используется в теории смазки:

$$(5.2) \quad \tau_{11}^{(t)} \sim \tau_{33}^{(t)} \sim \varepsilon \tau_{13}^{(t)} \sim \varepsilon^2 p^{(t)}, \quad \tau_{nm} = \tau_{13}^{(t)}$$

$$(5.3) \quad \frac{\partial \tau_{13}^{(t)}}{\partial s_3} - \frac{\partial p^{(t)}}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial p^{(t)}}{\partial s_3} = 0, \quad \tau_{13}^{(t)} = \eta_1 \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial s_3}, \quad \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial s_1} + \frac{\partial v_3^{(t)}}{\partial s_3} = 0$$

С учетом (3.11), (5.1), (5.2) запишем граничные условия (3.7) в виде

$$(5.4) \quad \left( v_3^{(t)} \pm \frac{1}{2} \frac{dH}{ds_1} v_1^{(t)} \right) = 0, \quad s_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$$

$$\tau_{13}^{(t)} = \mp \frac{\eta_1}{2} H \frac{d^2 v}{ds_1^2} \mp 2\eta_1 \frac{dH}{ds_1} \frac{dv}{ds_1} \pm \eta_1 \frac{d^2}{ds_1^2} (Hv), \quad s_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$$

Интегрируя (5.3) при условии (5.4), получим

$$(5.5) \quad v_1^{(t)} = \frac{1}{2\eta_1} \frac{dp^{(t)}}{ds_1} \left( s_1^2 - \frac{H^2}{12} \right), \quad v_3^{(t)} = \frac{1}{12\eta_1} \frac{dp^{(t)}}{ds_1} \frac{dH}{ds_1} H s_3,$$

$$\tau_{13}^{(t)} = \frac{dp^{(t)}}{ds_1} s_3$$

$$\frac{H}{2} \frac{dp^{(t)}}{ds_1} = \frac{\eta_1}{2} H \frac{d^2 v}{ds_1^2} + 2\eta_1 \frac{dH}{ds_1} \frac{dv}{ds_1} - \eta_1 \frac{d^2}{ds_1^2} (Hv)$$

Из (5.5) следует

$$\int_{-H/2}^{H/2} v_1^{(t)} ds_3 = 0$$

Этого соотношения достаточно для однозначного разделения компонент  $(n)$  и  $(t)$ . В приближении (3.11) поперечная компонента (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial s_3} + \frac{\partial p^{(s)}}{\partial s_3} = 0$$

откуда с учетом (3.15) получаем

$$(\sigma_{33} + p^{(s)}) \rho_0 = -\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g (H - H_\varphi)$$

Из общего соотношения (1.3) имеем

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^{(t)} - p^{(s)} - \rho_1 g \varphi$$

Комбинируя последние две формулы с учетом (2.3), получаем

$$(5.6) \quad -2\eta_1 \frac{dv}{ds_1} + 2 \left( \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \right) v - \rho_1 g \varphi = -\frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{\rho} (H - H_\varphi)$$

Проинтегрируем уравнения (3.13) с учетом граничных условий (3.9), в которых будем считать  $\partial \xi_n^{(i)} / \partial t = 0$ . Полученное выражение для  $\varphi$  подставим в (5.6), что даст уравнение

$$(5.7) \quad -2\eta_1 \frac{dv}{ds_1} + 2 \left( \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \right) \left[ c_1 \left( q s_3 \operatorname{sh} \frac{qH}{2} + \operatorname{ch} \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} \operatorname{sh} \frac{qH}{2} \right) + c_2 \left( q s_3 \operatorname{ch} \frac{qH}{2} - \operatorname{sh} \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} \operatorname{ch} \frac{qH}{2} \right) \right] = - \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{\rho_0} (H - H_\varphi)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы интегрирования. Приравняв коэффициент при  $s_3$  к нулю в последнем выражении, после несложных выкладок преобразуем (5.7) к эквивалентным соотношениям:

$$(5.8) \quad \frac{dv}{ds_1} = \left( \mu + \frac{2}{3} \right) qH \langle v \rangle \operatorname{cth} qH + \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{2\eta_1 \rho_0} (H - H_\varphi)$$

$$(5.9) \quad v \frac{dH}{ds_1} = H \langle v \rangle \left[ 1 - \left( \mu + \frac{2}{3} \right) qH \operatorname{cth} qH \right] - \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{2\eta_1 \rho_0} (H - H_\varphi)$$

Интегрируя продольную компоненту уравнения (3.8) и комбинируя результат с (5.6), получаем

$$(5.10) \quad 3\eta_1 \frac{dv}{ds_1} + p^{(i)} = \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{\rho_0} (H - H_\varphi - H_1), \quad H_1 = \text{const}$$

Из формул (5.8) и (5.10) следует

$$(5.11) \quad p^{(i)} = - \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{2\rho_0} (H - H_\varphi + 2H_1) - (3\eta_2 + 2\eta_1) \langle v \rangle qH \operatorname{cth} qH$$

Комбинируя последнее соотношение (5.5) и (5.10), после ряда преобразований приходим к

$$(5.12) \quad Hp^{(i)} = \eta_1 H \frac{dv}{ds_1} - 2\eta_1 H \langle v \rangle + \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g}{\rho_0} \left[ \frac{H_2}{2} - H_\varphi H - H_1 H + c_3 \right]$$

где  $c_3$  — константа интегрирования.

Исключая из (5.8), (5.10), (5.12)  $p^{(i)}$  и  $dv/ds_1$ , получим

$$(5.13) \quad \langle v \rangle = \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_1) g [H(4H_\varphi - 3H) - 2c_3]}{4\eta_1 \rho_0 H [2(\mu + 2/3) qH \operatorname{cth} qH - 1]}$$

Различия в морфологии осевых горстов Восточно-Тихоокеанского поднятия и рифтовых долин Срединно-Атлантического хребта вызвано соотношением плотностей коры и подстилающего субстрата. Для Тихого океана  $\rho_1 > \rho_0$ , для Атлантики  $\rho_1 < \rho_0$ . Ниже ограничимся рассмотрением Восточно-Тихоокеанского поднятия. В силу геометрии рассматриваемой зоны (см. фиг. 1)

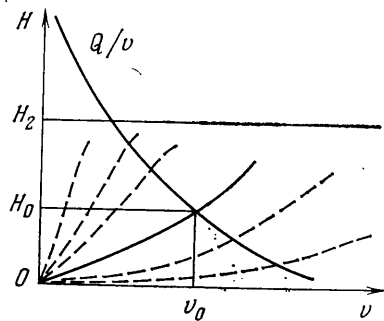
$$(5.14) \quad H_\varphi = H(0), \quad h_\varphi = h(0)$$

Из симметрии задачи и условия непрерывности в центре вытекает, что

$$(5.15) \quad v(0) = 0, \quad \frac{dH}{ds_1} = 0, \quad s_1 = 0,$$

при  $H(0) \neq 0$

Кроме того, будем считать, что вы-



Фиг. 2

полняется неравенство  $\mu < 2/3$ . Соотношения (5.14) – (5.15) совместимы с (5.9) только при условии  $H(0) = 0$ . Естественное требование ограниченности функции  $\langle v \rangle$  при  $H \rightarrow 0$  приводит к тому, что в (5.13) следует положить  $c_3 = 0$ , и тогда

$$(5.17) \quad \langle v \rangle = \frac{3H\rho_1(\rho_1 - \rho_0)g}{4\eta_1\rho_0[2(\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH - 1]}$$

Подставляя (5.17) в (5.8), (5.9), имеем

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \frac{dH}{ds_1} &= f_1(H, v), \quad f_1(H, v) = \frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_0)gH^2[(\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH + 1]}{4\eta_1\rho_0v[2(\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH - 1]} \\ \frac{dv}{ds_1} &= f_2(H), \quad f_2(H) = \frac{\rho_1(\rho_0 - \rho_1)gH[2 - (\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH]}{4\eta_1\rho_0[2(\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH - 1]} \end{aligned}$$

По смыслу постановки задачи имеем следующие ограничения на физическую область решений:

$$s_1 \frac{dH}{ds_1} > 0, \quad s_1 \frac{dv}{ds_1} > 0, \quad v > 0, \quad H > 0, \quad s_1 v > 0$$

Семейство траекторий в фазовой плоскости  $(H, v)$  динамической системы (5.18) показано на фиг. 2, где  $H_2$  – корень уравнения  $(\mu + 2/3)qH \operatorname{cth} qH = 2$ . Гипербола  $H = Q/v$  ограничивает физическую область на этой плоскости. Вычислим среднее значение горизонтальных напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= 4 \left( \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \right) \langle v \rangle \operatorname{cth} qH - 2\eta_1 \langle v \rangle + \frac{\rho_1(\rho_0 - \rho_1)g}{\rho_0} H - \\ &- \rho_1 g \left[ h_\varphi - h - \frac{H}{2} \right] \end{aligned}$$

Считая заданными боковые усилия  $N$  на торцах слоя  $\Gamma_3, \Gamma_4$  из уравнения  $H \langle \sigma_{11} \rangle = N$  найдем толщину коры  $H_0$  на границах активной зоны раздвижения. Пересечение линии  $H = H_0$  и гиперболы  $H = Q/v$  определяет единственную траекторию и дает значение горизонтальной скорости коры на границе  $v_0$ . Полуширина зоны активного раздвижения дна и образования коры находится с помощью квадратуры

$$L = \int_0^{H_0} dH / f_1(H, v)$$

В результате решения задачи получились распределения толщины коры  $H$ , ее горизонтальной скорости  $v$  и интенсивности внедрения магмы  $\langle v \rangle$  в зависимости от расстояния  $s_1$  до гребня Восточно-Тихоокеанского поднятия, которые согласуются с геолого-геофизическими данными. В частности, в соответствии с решением для  $H = H(s_1)$  кора в самом центре Восточно-Тихоокеанского поднятия выклинивается (т. е.  $H(0) = 0$ ), откуда следует вывод, что в узкой центральной зоне должны изливаться на поверхность дна базальтовые лавы, причем ширина зоны излияний  $l$  по крайней мере на порядок меньше размеров  $L$  активной области формирования коры, т. е.  $l \approx 1$  км ( $L \approx 20 - 30$  км). Этот вывод соответствует прямым наблюдениям океанского дна с помощью глубоководных спускаемых

аппаратов [10], а также расчетам магнитоактивного слоя коры [11]. По мере удаления от оси мощность коры  $H$  монотонно увеличивается, достигая «стационарного» значения  $H_0$  на флангах активной зоны, что согласуется с сейсмическими разрезами осевой зоны Восточно-Тихоокеанского поднятия [9]. Мощность интрузий (т. е. внедрений магмы в кору с последующим ее застыванием)  $\langle v \rangle$  возрастает от центра к флангам активной зоны. Поскольку раскрытие внутренних трещин приводит к появлению поверхностных трещин, то усиление интрузивной деятельности может привести к появлению поверхностных излияний. Этим объясняется наличие открытых трещин с излияниями молодых базальтов на значительном удалении от центра рифта. С учетом принципа изостазии в рамках модели объясняется морфология осевых горстов Восточно-Тихоокеанского поднятия. При расчетах линейных магнитных аномалий океанских хребтов можно использовать расчетное плавное распределение горизонтальной скорости движения коры  $v(s_1)$  вместо традиционного, но физически некорректного распределения, характеризующегося постоянной скоростью с разрывом в центре. Поскольку в окрестности оси хребта скорости близки к нулю, здесь могут существовать застойные зоны, известные в геофизической литературе как «non-spreading blocks» [12].

В заключение авторы благодарят В. П. Мясникова и В. Н. Николаевского за полезные обсуждения настоящей работы.

Поступила 20 IX 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пишон К. Ле, Франшито Ж., Боннин Ж. Тектоника плит. М., «Мир», 1977.
2. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
4. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
5. Ниаматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.
6. Каракин А. В. К выводу основных уравнений механики тающего льда. В сб.: Физика льда и ледотехника. Якутск, Изд. Якутск. филиала СО АН СССР, 1974.
7. Рейнер М. Деформация и течение. М., Гостоптехиздат, 1963.
8. Nikolaevskii V. N., Rice J. R. Current topics on the non-elastic deformation of geological materials. Proc. of 6th Airapt. Inter. High Press. Conf. Boulder, Colorado, 1977.
9. Rosendahl B. R. Evolution of oceanic crust. 2. Constraints, implications and inferences. J. Geophys. Res., 1976, vol. 81, No. 29.
10. Ballard R. D., Bryan W. B., Heirtzler J. R., Keller G., Moore J. G., Van Andel T. Manual submersible observations in the FAMOUS area: Mid - Atlantic ridge. Science, 1975, vol. 190, No. 4210.
11. Matthews D. H., Bath J. Formation of magnetic anomaly pattern of Mid - Atlantic Ridge. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1967, vol. 13, No. 1-3.
12. Anderson R. N., Noltimier H. C. A model for the horst and graben structure of mid-ocean ridge crest based upon spreading velocity and basalt delivery to the oceanic crust. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1973, vol. 34, No. 2.