**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1979**

УДК 532.546

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНОЙ НАСЫЩЕННОСТИ НА РАСТЕКАНИЕ БУГРА ЖИДКОСТИ В ГАЗОВОМ ПЛАСТЕ

И. Н. КОЧИНА, Н. Н. МИХАЙЛОВ, М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Рассмотрена задача о растекании бугра грунтовых вод в пласте с учетом частичного удержания воды в ранее занимаемом объеме. Ранее была рассмотрена задача о растекании бугра жидкости при условии полного замещения ее газом [1, 2]. Эта задача сводится к уравнению Буссинеска, и если бугор жидкости в начальный момент сосредоточен в бесконечно малой окрестности оси симметрии, то задача автомодельна и получается решение типа мгновенного источника. Это решение удовлетворяет соотношению, выражающему сохранение полной массы жидкости во всем объеме пористой среды.

Исследуемая в данной работе задача сводится к решению уравнения Буссинеска с коэффициентом, терпящим скачок в точке, где $\partial h/\partial t=0$ (h – высота бугра), условие же сохранения массы жидкости принимает неинтегрируемую форму, так как часть жидкости остается за пределами бугра. Показано, что уравнение Буссинеска с разрывным коэффициентом имеет асимптотическое автомодельное решение второго рода вида $h=At^{-\alpha}f(r/Bt^\beta)$, причем коэффициенты α и β не определяются уже из соображений размерности, но находятся в процессе решения. Получено численное решение неавтомодельной задачи, которое асимптотически приближается к автомодельному при больших значениях времени.

1. В газовом пласте бесконечной мощности с непроницаемым горизонтальным основанием в начальный момент имеется бугор жидкости, который затем растекается под действием силы тяжести по пласту, причем жидкость вытесняет газ не полностью, а занимает только долю объема пор, равную σ. Насыщенность жидкости в исходном бугре также составляет σ. В том объеме, который жидкость ранее занимала, также остается некоторое количество жидкости, остаточная насыщенность ее составляет $\sigma_0<\sigma$ (фиг. 1).

Будем считать, что в начальный момент жидкость занимала некоторый объем, симметричный относительно оси z.

Выведем дифференциальное уравнение для высоты бугра жидкости (напора) $h(r, t)$, считая движение осесимметричным. Заранее примем, что всюду, кроме точки $r=0$, производная $\partial h/\partial r<0$.

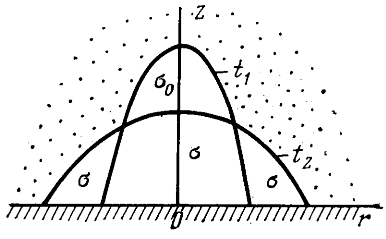
Принимая предпосылки гидравлической теории безнапорного движения [3], т. е. пренебрегая вертикальной компонентой скорости фильтрации, и считая, что давление по высоте меняется по закону гидростатики, можно написать выражение расхода жидкости через цилиндрическую поверхность $2\pi rh$ (фиг. 2)

$$q=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}2\pi rh=-\frac{k}{\mu}\rho g\frac{\partial h}{\partial r}2\pi rh=-\frac{k\rho g\pi}{\mu}r\frac{\partial h^2}{\partial r} \tag{1.1}$$

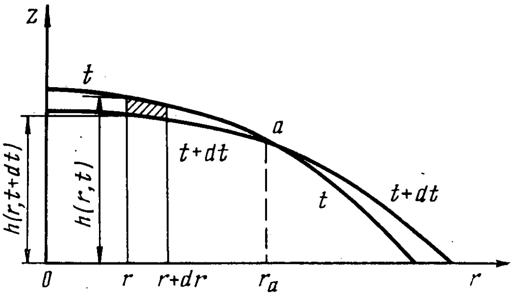
Здесь k – коэффициент проницаемости пористой среды, μ – вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, давление $p=p_0+\rho gh$, p_0 – давление в газовом пласте.

Приравнивая изменение расхода жидкости изменению объема ее за счет уменьшения насыщенности от σ до остаточной насыщенности σ_0, получим уравнение Буссинеска с коэффициентом $c_1=k\rho g[2m\mu(\sigma-\sigma_0)]^{-1}$, которое имеет место только при условии $\partial h/\partial t<0$, т. е. для значений $r<r_a$.

Для значений $r>r_a$ ($\partial h/\partial t>0$) при повышении уровня жидкости насыщенность изменяется от нуля до σ; здесь дифференциальное уравнение Буссинеска имеет коэффициент $c_2=k\rho g(2m\mu\sigma)^{-1}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, задача о растекании бугра жидкости с учетом остаточной насыщенности свелась к решению уравнения Буссинеска с разрывным коэффициентом, зависящим от производной по времени, со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad &\frac{\partial h}{\partial t}=c_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial h}{\partial t}<0\\ &\frac{\partial h}{\partial t}=c_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial h}{\partial t}>0\end{aligned}$$

$$(1.3)\qquad h(\infty,t)=0, \quad \frac{\partial h}{\partial r}=0 \quad (r=0)$$

(последнее условие вытекает из симметрии решения относительно оси z и отсутствия притока жидкости на оси симметрии) и с условиями непрерывности напора $h(r,\ t)$ и производной по r в точке, где $\partial h/\partial t=0$. Непрерывность производной следует из постоянства коэффициента проницаемости пористой среды, разрывность коэффициента c связана с остаточной водонасыщенностью.

В начальный момент задается форма бугра.

Таким образом, существенное отличие этой задачи от решенной ранее [1,2] заключается в том, что не выполняется условие сохранения массы жидкости в бугре, так как часть ее (с насыщенностью σ_0) остается за пределами бугра. Это создает дополнительную нелинейность, связанную с наличием в задаче подвижной границы, на которой претерпевает разрыв коэффициент в уравнении для напора.

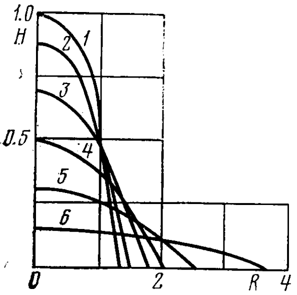
2. Можно проверить непосредственно, что автомодельное решение задачи, представленной уравнением (1.2) с условиями (1.3) и с начальным условием типа мгновенного источника, отсутствует. Причиной этого является непостоянство (уменьшение) массы жидкости в растекающемся бугре.

Невырожденная задача, представленная уравнением (1.2), условиями (1.3), условием непрерывности функции h и $\partial h^2/\partial r$ и начальным условием

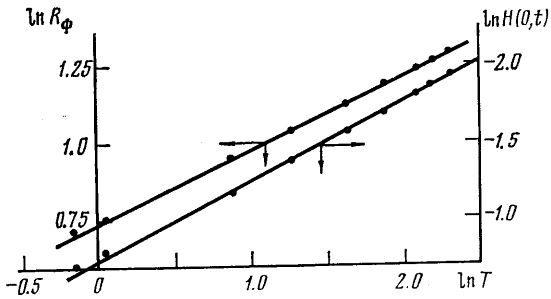
$$(2.1)\qquad h(r,0)=\frac{M}{r^2}h_0\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

где M — объем жидкости в начальный момент, была решена численно. При расчетах были взяты безразмерные переменные $H=h/h_0$, $R=r/r_0$, $T=2c_2th_0/r_0^2$ и приняты начальные условия $H(R,\ 0)=1$ при $R\leqslant 1$, $H(R,\ 0)=0$ при $R>1$. В расчетах на ЭВМ была использована двухслойная схема.

В результате счета были получены зависимости $H(R,\ T)$ для разных значений параметра c_2/c_1; на фиг. 3 приведены графики для случая



Фиг. 3



Фиг. 4

$c_2/c_1=0{,}9$. Кривые *1—6* соответствуют значениям $T=0.05$, 0.15, 0.35, 0.85, 2.46, 10.06.

Кроме того, по данным расчетов построены графики зависимости $\ln H(0,\ T)$ от $\ln T$ и $\ln R_\Phi$ от $\ln T$ (R_Φ — безразмерная координата переднего фронта области, занятой жидкостью) (фиг. 4), как видно, для больших значений времени они прямолинейны, что говорит о степенной зависимости $H(0,\ T)$ и R_Φ от T.

3. Данные численного счета подсказывают, что существует асимптотическое автомодельное решение. Проводя анализ задачи аналогично тому, как это сделано в работах [4, 5], приходим к заключению, что это решение должно иметь вид

$$h=At^{-\alpha}f(\zeta,\ c_2/c_1),\quad \zeta=r/(Bt^\beta) \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) представляет собой автомодельное решение второго рода, оно определяет асимптотику задачи Коши, представленной уравнением (1.2) с условиями (1.3), (2.1), а также с условиями непрерывности функции h и производной $\partial h^2/\partial r$.

Параметры α и β неизвестны и наряду с коэффициентами A и B подлежат определению в ходе решения задачи.

Подставив $h(r,\ t)$ в виде (3.1) в первое из уравнений (1.2), получим

$$\frac{d^2f^2}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{df^2}{d\zeta}+\frac{B^2}{Ac_1}t^{\alpha+2\beta-1}\left(\alpha f+\beta\zeta\frac{df}{d\zeta}\right)=0 \tag{3.2}$$

Как видно, для существования автомодельного решения необходимо, чтобы выполнялось условие $\alpha+2\beta=1$.

Переменную ζ можно выбирать с точностью до постоянного множителя B. Выберем его так, чтобы $A=B^2/c_1$, тогда уравнение (3.2) и второе из уравнений (1.2) приведутся к виду

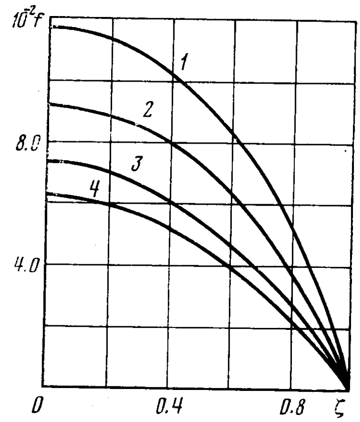
$$\begin{gathered}\frac{d^2f^2}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{df^2}{d\zeta}+\alpha f+\beta\zeta\frac{df}{d\zeta}=0,\quad \alpha f+\beta\zeta\frac{df}{d\zeta}>0\\ \frac{d^2f^2}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{df^2}{d\zeta}+\frac{c_1}{c_2}\left(\alpha f+\beta\zeta\frac{df}{d\zeta}\right)=0,\quad \alpha f+\beta\zeta\frac{df}{d\zeta}<0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Кроме того, из условий (1.3) имеем

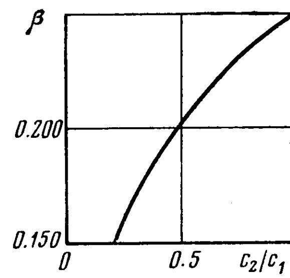
(3.4) $\qquad f'(0)=0, \quad f(\infty)=0$

и функция $f(\zeta,\ c_2/c_1)$ непрерывна всюду вместе со своей производной.

Решение уравнений (3.3) при условиях (3.4) может быть получено только с точностью до постоянной, так как не может быть использован закон сохранения массы, который для данной задачи принимает неинтегрируемую форму.



Фиг. 5



Фиг. 6

Уравнения (3.3) решались численно, причем принималось (для нормировки), что $f(1)=0$, при этом из второго уравнения (3.3) следует, что $f'(1)=-c_1\beta/2c_2$.

Значения β определялись методом половинного деления. Искомое значение β соответствовало условию $|f'(0)-0|<\varepsilon$, где ε — точность расчетов. Графики зависимостей $f(\zeta,\ c_2/c_1)$ и $\beta(c_2/c_1)$ приведены на фиг. 5 и 6. На фиг. 5 кривые *1—4* построены для значений $c_2/c_1=0.2$, 0.4, 0.7, 0.98 соответственно.

Для определения напора по формуле (3.1) нужно знать константу A, которая может быть найдена путем склейки автомодельного решения (3.1) с неавтомодельным. Из выражения для ζ при условии $f(1)=0$ определяется координата переднего фронта движения жидкости

(3.5) $\qquad r_\Phi=\zeta_\Phi Bt^\beta=Bt^\beta=\sqrt{Ac_1}t^\beta$

Сопоставим результаты расчетов неавтомодельного решения и асимптотического автомодельного (3.1). Автомодельное решение в безразмерной форме и координата переднего фронта имеют вид

(3.6) $\qquad H(R,T)=A_1T^{-\alpha}f(\zeta, c_2/c_1), \quad A_1=A(2c_2)^\alpha/h_0^{\alpha+1}$

(3.7) $\qquad R_\Phi=B_1T^\beta, \quad B_1=(A_1c_1/2c_2)^{1/2}$

В логарифмических координатах получим

(3.8) $\qquad \ln H(0,T)=-\alpha\ln T+\ln[A_1f(0,\ c_2/c_1)]$

(3.9) $\qquad \ln R_\Phi=\beta\ln T+\ln B_1$

т. е. прямые линии с угловыми коэффициентами $-\alpha$ и β и отрезками, отсекаемыми на осях ординат, равными $\ln[A_1f(0,\ c_2/c_1)]$ и $\ln B_1$ соответственно.

Для случая $c_2/c_1=0.9$ из графика фиг. 6 следует, что $\beta=0.243$ и тогда $\alpha=1-2\beta=0.514$.

Для неавтомодельного решения угловые коэффициенты прямых, представленных на фиг. 4, равны соответственно -0.497 и 0.238, так что с точностью до 3% их можно считать равными $-\alpha$ и β. Следовательно, при больших значениях времени неавтомодельное решение выходит на автомодельный режим и определяется формулой (3.6), а графики на фиг. 4 удовлетворяют уравнениям (3.8) и (3.9). Отрезки, отсекаемые прямыми, представленными на фиг. 4, на осях ординат, и равные $\ln[A_1 f(0, c_2/c_1)]$ и $\ln B_1$, позволяют определить значения A_1 и B_1 и проверить выполнение зависимости $A_1=2B_1^2c_2/c_1$. Для $c_2/c_1=0.9$ имеем из графика фиг. 5 $f(0,0.9)=0.0645$ и соотношение между A_1 и B_1 оказывается выполненным с точностью до 6%.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту за ценные указания в работе и В. Ф. Баклановской за помощь при счете.

Поступила 30 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., «Наука», 1977.
3. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., Гидрометеоиздат, 1978.
5. *Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И.* Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.