

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ

В. Н. ПРИБЫЛОВ, Л. Т. ЧЕРНЫЙ

(Москва)

Используя методы механики сплошной среды [1], рассмотрим задачу об электризации диэлектрических жидкостей при течении по трубам [2-6]. Согласно современным представлениям [2-6], в них всегда растворено незначительное количество примесного электролита, молекулы которого в таком разбавленном растворе диссоциируют в некоторой степени на положительно и отрицательно заряженные ионы. На стенках протекают окислительные (восстановительные) реакции, в результате которых отрицательные (положительные) ионы отдают стенке (забирают со стенки) лишние (недостающие) электроны. Таким образом в жидкости накапливается положительный (отрицательный) суммарный электрический заряд, выносимый потоком.

Ниже рассматривается задача об электризации диэлектрической жидкости при ламинарном течении в круглой цилиндрической трубе.

Найдены распределение электрического заряда в жидкости, максимальный электрический ток и зависимость длины установления распределения электрического заряда в трубе от радиуса трубы, дебаевского радиуса жидкости и диффузионного числа Пекле.

1. В ряде работ [2-5] изучалась электризация диэлектрических жидкостей в предположении, что молекулы примесного электролита полностью диссоциированы, в окислительно-восстановительных реакциях на стенках участвуют ионы только одного сорта (или отрицательные, или положительные), сами эти реакции протекают бесконечно быстро.

Ниже дано решение задачи об электризации диэлектрической жидкости, текущей по круглой цилиндрической трубе, в другом предельном случае. Предполагается: в жидкости и на стенках трубы идут реакции диссоциации молекул примесного электролита A и рекомбинации образовавшихся ионов A_{\pm} ($A \rightleftharpoons \nu_- A_- + \nu_+ A_+$, ν_{\pm} — стехиометрические коэффициенты), причем степень диссоциации мала; в окислительно-восстановительных реакциях на стенках участвуют ионы только одного сорта, и образующиеся нейтральные молекулы присутствуют в избытке по сравнению с ионами; электризация является химически равновесным процессом, лимитирующей стадией которого является диффузия ионов к стенкам.

Для водных растворов подобные химические реакции протекают в насыщенном растворе хингидрона $C_6H_4O_2 \cdot C_6H_4(OH)_2$, который слабо растворим (следовательно, раствор будет разбавленным) и распадается на хинон $C_6H_4O_2$ и гидрохинон $C_6H_4(OH)_2$ с постоянными и эквивалентными концентрациями [7]. Гидрохинон, являясь слабой кислотой, частично диссоциирует, причем образовавшийся анион переходит при окислении в хинон



Ограничимся также исследованием электризации несжимаемой жидкости при ламинарном течении, что представляет большой интерес в связи с изучением электризации в капиллярах и фильтрах [2-6].

С учетом сделанных предположений система уравнений и граничных условий, описывающая процесс электризации диэлектрической жидкости, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{I}_{\pm} = v_{\pm} \kappa, \quad \mathbf{I}_{\pm} = n_{\pm} \mathbf{u} \pm \frac{e z_{\pm} D_{\pm} n_{\pm}}{k_0 T} \mathbf{E} + D_{\pm} \nabla n_{\pm} \quad (1.1)$$

$$n_{+} v_{+} n_{-} v_{-} = K n = (n_{+}^{\circ}) v_{+} (n_{-}^{\circ}) v_{-}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} e (z_{+} n_{+} - z_{-} n_{-}) \quad (1.2)$$

$$n_{\pm} = n_{\pm}^{\circ}, \quad n_{-} = K_s n_h \quad (1.2)$$

$$z_{+} v_{+} = z_{-} v_{-}, \quad z_{+} n_{+}^{\circ} = z_{-} n_{-}^{\circ} \quad (1.3)$$

Первое граничное условие (1.2) выполняется на входе в трубу, второе — на стенке трубы.

Условные обозначения: e — заряд протона; k_0 — постоянная Больцмана; ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкости; z_{\pm} — зарядовые числа ионов; K , K_s — константы равновесия реакции диссоциации и рекомбинации и окислительно-восстановительной реакции; T — абсолютная температура; \mathbf{u} — скорость жидкости, которая считается известной (влияние электризации на течение жидкости обычно несущественно); \mathbf{E} — напряженность электрического поля; n_{\pm} , \mathbf{I}_{\pm} — концентрации и потоки положительных и отрицательных ионов соответственно; n , n_h — концентрации недиссоциированных молекул примесного электролита и молекул вещества, образующегося в результате восстановительной реакции; n_{\pm}° — концентрация положительных и отрицательных ионов в начальном сечении трубы; D_{\pm} — коэффициенты диффузии положительных и отрицательных ионов; $v_{\pm} \kappa$ — скорости изменений концентрации ионов за счет реакций диссоциации и рекомбинации. В соотношениях (1.1) — (1.3) принимается, что в трубу втекает незаряженная жидкость, зависимость K и K_s от напряженности электрического поля несущественна, температура постоянна, и в силу сделанных предположений величины n и n_h также постоянны.

На основании данных [2-4] по проводимости и максимальному электрическому току, вытекающему из труб, легко оценить величину относительного изменения концентрации ионов, участвующих в реакции на стенке. Она оказывается меньше 0.1. Поэтому граничное условие на стенке трубы можно записать следующим образом:

$$n_{-} = K_s n_h = n_{-}^{\circ} - \gamma \eta (|\gamma| \ll 1) \quad (1.4)$$

($\gamma \eta = \text{const}$ — величина, показывающая, насколько концентрация отрицательных ионов на стенке отличается от концентрации на входе в трубу).

Введем цилиндрическую систему координат (x, r, ϕ) , ось x которой совпадает с осью трубы.

Переходя к безразмерным величинам

$$x^* = \frac{x}{R}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad E^* = \frac{e(z_{+} + z_{-})R}{2k_0 T} \mathbf{E}, \quad n_{\pm}^* = \frac{n_{\pm}}{n^{\circ}}$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa R^2}{D n^{\circ}}, \quad \mathbf{I}^* = \frac{\mathbf{I}_{\pm} R}{D n^{\circ}} \left(n^{\circ} = \frac{z_{+} n_{+}^{\circ} + z_{-} n_{-}^{\circ}}{z_{+} + z_{-}}, \quad D = \frac{z_{+} D_{+} + z_{-} D_{-}}{z_{+} + z_{-}} \right)$$

и линеаризуя уравнения (1.1) по малому параметру γ , с учетом соотношений (1.3) имеем

$$\begin{aligned}
 n_{\pm}^* &= \frac{z_+ + z_-}{2z_{\pm}} + \gamma n_{\pm 1}, & E^* &= \gamma E_1 \\
 (1.5) \quad \operatorname{div}^* I_{\pm}^* &= \nu_{\pm} \kappa^*, & I_{\pm}^* &= \operatorname{Pe} n_{\pm}^* u^* + \frac{D_{\pm}}{D} (\pm E^* - \nabla n_{\pm}^*) \\
 n_+^* + n_-^* &= \frac{(z_+ + z_-)^2}{2z_+ z_-}, & \operatorname{div}^* E^* &= \operatorname{Rd}^{-2} \frac{z_+ n_+^* - z_- n_-^*}{z_+ + z_-} \\
 \operatorname{Pe} &= \frac{u_0 R}{D}, & \operatorname{Rd} &= \frac{\rho}{R}, & \rho^2 &= \frac{\varepsilon k T}{4\pi e^2} (z_+^2 n_+^{\circ} + z_-^2 n_-^{\circ})^{-1}
 \end{aligned}$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, R — радиус трубы, u_0 — скорость на оси трубы, индекс 1 означает, что данная величина соответствует линейному приближению по параметру γ .

Преобразуем систему уравнений (1.5). Вычитая из умноженного на z_+ уравнения неразрывности для положительных ионов аналогичное соотношение для отрицательных ионов и используя первое равенство (1.3), получим следующее уравнение:

$$(1.6) \quad \operatorname{div} (z_+ I_+^* - z_- I_-^*) = 0$$

выражающее в безразмерной форме закон сохранения электрического заряда. Используя затем предпоследнее уравнение из (1.5) и равенства (1.3), выразим концентрации n_{\pm}^* через безразмерную плотность электрического заряда $q^* = z_+ n_+^* - z_- n_-^*$

$$(1.7) \quad n_{\pm}^* = \frac{z_+ + z_-}{2z_{\pm}} \pm \frac{q^*}{z_+ + z_-}$$

Заменим в уравнении (1.6) плотности потоков ионов I_{\pm}^* их выражениями (1.5) и подставим в получившееся соотношение выражение (1.5) для величины $\operatorname{div}^* E^*$, значения (1.7) для концентраций ионов, а также значения компонент скорости жидкости $u_x^* = 1 - r^{*2}$, $u_r^* = u_{\theta}^* = 0$, определяющиеся формулой Пуазейля. В результате в выбранной цилиндрической системе координат получим для величины q^* следующее уравнение:

$$(1.8) \quad \operatorname{Pe} (1 - r^{*2}) \frac{\partial q^*}{\partial x^*} - \Delta^* q^* + \operatorname{Rd}^{-2} q^* = 0$$

Граничные условия для величины $q^* = z_+ n_+^* - z_- n_-^*$ на основании равенств (1.3), (1.4) и предпоследнего соотношения из (1.5) имеют вид

$$(1.9) \quad q^*|_{x^*=0} = 0, \quad q^*|_{r^*=1} = \gamma \frac{\eta}{n_0} \equiv \eta^*$$

Оценим порядок различных членов в выражении для лапласиана $\Delta^* q^*$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial q^*}{\partial r^*} \right) \sim \frac{q^*}{\min(1, \operatorname{Rd}^2)}, \quad \frac{\partial^2 q^*}{\partial x^{*2}} \sim \frac{q^*}{L^{*2}}$$

где L^* — безразмерная длина релаксации электрического заряда в трубе (при $x^* \gg L^*$ q^* не зависит от x^*). Так как обычно $L^{*2} \gg \min(1, \operatorname{Rd}^2)$ [2, 5] и, кроме того, в силу симметрии задачи $\partial q^* / \partial \theta = 0$, то уравнение

(1.7) можно записать в виде

$$(1.10) \quad \text{Pe}(1-r^{*2}) \frac{\partial q^*}{\partial x^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial q^*}{\partial r^*} \right) + \text{Rd}^{-2} q^* = 0$$

Далее везде кроме п. 4 индекс * опускается.

2. Решение уравнения (1.4) ищется в виде

$$(2.1) \quad q = q_s(r) + q_h(x, r)$$

где q_s — решение при $x \rightarrow \infty$, q_h — общее решение уравнения (1.10) с нулевыми граничными условиями на стенке.

Функция $q_s(r)$ удовлетворяет уравнению

$$q_s'' + r^{-1} q_s' - \text{Rd}^{-2} q_s = 0$$

причем при $r=1$ $q_s = \eta$.

Решая последнее уравнение, получим

$$(2.2) \quad q_s = \eta I_0(\text{Rd}^{-1}r) / I_0(\text{Rd}^{-1})$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Функцию q_h можно представить в виде

$$q_h(x, r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k q_k(r) \exp(-\lambda_k x) \quad (C_k = \text{const})$$

так как рассматриваемая задача удовлетворяет всем требованиям, при которых применим метод Фурье [8].

Подставляя последнее выражение в соотношение (1.10), для $q_k(r)$ получим уравнение

$$(2.3) \quad q_k'' + r^{-1} q_k' + [(1-r^2) \text{Pe} \lambda_k - \text{Rd}^{-2}] q_k = 0$$

Заменой

$$z_k = \alpha_k r^2 \quad (\alpha_k = \sqrt{\lambda_k \text{Pe}}), \quad q_k(r) = \exp(-z_k/2) v_k(z_k)$$

уравнение (2.3) приводится к виду

$$(2.4) \quad z_k v_k'' + (1-z_k) v_k' - a_k v_k = 0$$

$$(2.5) \quad a_k = 1/2 - 1/4 (\alpha_k - 1/\alpha_k \text{Rd}^2) \quad (\alpha_k = \sqrt{\lambda_k \text{Pe}})$$

Уравнение (2.4) является вырожденным гипергеометрическим уравнением [9]. Регулярным в нуле решением этого уравнения является ряд Куммера [9, 10]

$$\Phi_k(a_k, 1, z_k) = 1 + \frac{a_k}{1} \frac{z_k}{1!} + \frac{a_k(a_k+1)}{1(1+1)} \frac{z_k^2}{2!} + \dots$$

Таким образом, для безразмерной плотности электрического заряда q имеем

$$q = \eta \frac{I_0(\text{Rd}^{-1}r)}{I_0(\text{Rd}^{-1})} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\lambda_k x - \frac{\alpha_k r^2}{2}\right) \Phi_k(a_k, 1, \alpha_k r^2)$$

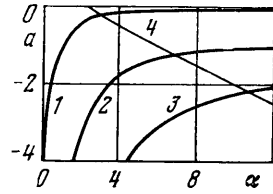
Собственные функции $\exp(-\alpha_k r^2/2) \Phi_k$ ортогональны в области $r \leq 1$ с весом $(1-r^2)$. Кроме того, из (1.9), (2.1) получим при $x=0$ $q_s = -q_h$.

Разлагая q_s по функциям $\exp(-\alpha_k r^2/2) \Phi_k$, найдем коэффициенты C_k

$$C_k = \int_0^1 (1-r^2) q_s \exp(-\alpha_k r^2/2) \Phi_k(a_k, 1, \alpha_k r^2) r dr \times \\ \times \left[\int_0^1 (1-r^2) \exp(-\alpha_k r^2) \Phi_k^2(a_k, 1, \alpha_k r^2) r dr \right]^{-1}$$

Для нахождения λ_k используем граничное условие на стенке трубы (1.9). При $r=1$ имеем $\Phi_k(a_k, 1, z_k)=0$. Кроме того, a_k и α_k связаны между собой соотношением (2.5). Чтобы определить величины a_k, α_k , а значит, и λ_k , достаточно найти на плоскости $a\alpha$ пересечение двух кривых, задаваемых формулой (2.5) и выражением $\Phi_k(a_k, 1, \alpha_k)=0$.

Функция Куммера $\Phi(a, 1, \alpha)$ обладает следующим свойством [9]: она обращается в нуль только при $a < 0$, причем при $a \geq -1 - 1$ раз, при $a \geq -2 - 2$ раза, при $a \geq (-n) - n$ раз. На фиг. 1 линией 4 дана зависимость (2.5), кривыми 1-3 изображены соотношения $\Phi^{1,2,3}(a, 1, \alpha)=0$, при этом индексы 1, 2, 3 соответствуют первым, вторым и третьим нулям функции Куммера Φ . При расчетах принималось $Rd=1$. Величины a_k, α_k, λ_k при $k=1, 2, 3$ оказались равными соответственно $(-0.146 \ 2.93 \ 8.58/Pe)$, $(-1.16 \ 6.79 \ 45.1/Pe)$, $(-2.19 \ 10.7 \ 114.5/Pe)$, при этом размерная длина релаксации плотности электрического заряда $L=R(\min_k \lambda_k)^{-1}$ равна $R \ Pe/8.58$.



Фиг. 1

3. Исследуем предельные случаи больших и малых чисел Rd

1. $Rd \ll 1$. Этот случай соответствует тонкому двойному электрическому слою (электрический заряд сосредоточен вблизи стенки трубы). Очевидно, что при $a=0$ (для любых значений Rd) из (2.5) следует

$$\alpha = 1 + \sqrt{1 + Rd^{-2}} = \alpha_0$$

При $Rd \ll 1$ имеем $\alpha_0 = Rd^{-1}$, точка (a_1, α_1) с уменьшением величины Rd стремится к точке $(0, \alpha_0)$, кроме того

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_0^2}{Pe} \quad L = \frac{R}{\lambda_1} = R \ Pe \ Rd^2 \quad \left(Pe = \frac{u_0 R}{D} \right)$$

2. $Rd \gg 1$. В установившемся режиме этому случаю соответствует равномерное распределение заряда по сечению трубы. Проводя вычисления, найдем значения α_1, λ_1, L

$$\alpha_1 = \sqrt{7.18}, \quad \lambda_1 = \frac{\alpha_1^2}{Pe}, \quad L = \frac{R \ Pe}{\alpha_1^2}$$

Для зависимости безразмерной длины релаксации заряда $L^* = L/R = 1/\lambda_1$ от параметра Rd^2 получим $L^* = Pe \ Rd^2$ ($Rd \ll 1$), $L^* = Pe/8.58$ ($Rd = 1$), $L^* = Pe/7.18$ ($Rd \gg 1$).

На фиг. 2 изображена зависимость L^* от Rd^2 , где $\text{tg } \psi = Pe$. Полученная кривая с достаточной точностью аппроксимируется следующей формулой:

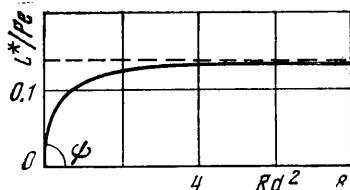
$$L^* \approx \frac{Rd^2}{1 + \beta Rd^2} \ Pe \ (\beta = 7.18)$$

Видно, что безразмерная длина релаксации плотности электрического заряда в трубе L^* линейно зависит от параметра $Pe = u_0 R/D$.

4. Рассмотрим решение при $x \gg L$ (установившийся режим). Тогда распределение плотности электрического заряда определяется формулой (2.2). Для плотности электрического тока j имеем

$$j = en^0 u_0 (1 - r^{*2}) q_*^*$$

Величина безразмерного электрического тока через поперечное сечение трубы $J^* = J\varepsilon / 4\pi en^0 u_0 \rho^2$ (J — размерный электрический ток) определяется следующим образом:



Фиг. 2

$$(4.1) \quad J^* = \frac{\varepsilon}{2en^0 u_0 \rho^2} \int_0^{R-\delta} jr \, dr =$$

$$= \frac{\varepsilon \eta^*}{2I_0 (Rd^{-1})} \{ 2(1-\delta^*)^2 I_0(h) -$$

$$- h [4Rd^2 - \delta^*(2-\delta^*)] I_1(h) \}$$

Здесь δ — расстояние от стенки трубы до плоскости скольжения, $\delta^* = \delta/R$, $h = (1-\delta^*)Rd^{-1}$, I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка. При $Rd \ll 1$, используя асимптотическое разложение функций Бесселя [9], легко получить из (4.1) следующее выражение для J^* :

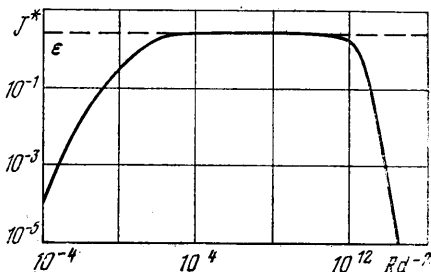
$$J^* = \varepsilon \eta^* (1 + \delta^* Rd^{-1}) \exp(-\delta^* Rd^{-1})$$

На фиг. 3 дана зависимость безразмерного электрического тока J^* от параметра Rd^{-2} . Если коэффициенты диффузии положительных и отрицательных ионов равны, то величина Rd^{-2} связана с безразмерной проводимостью $\sigma^* = \sigma_0 R^2 / D$ соотношением $Rd^{-2} = 4\pi \sigma^* / \varepsilon$ (здесь σ_0 — проводимость жидкости, D — коэффициент диффузии ионов).

При расчетах принималось: $\delta^* = 10^{-6}$, $\varepsilon = 3$, $\eta^* = 1$. При больших значениях дебаевского радиуса электрический ток мал (при этом проводимость жидкости невелика), что обусловлено малостью концентрации примесного электролита. Когда же дебаевский радиус мал по сравнению с радиусом трубы (при этом проводимость жидкости достаточно велика), значение электрического тока также мало. В этом случае ток не вытекает из трубы, так как почти весь электрический заряд находится между стенкой и плоскостью скольжения. Подобная зависимость тока электризации диэлектрических жидкостей от их проводимости действительно наблюдается экспериментально [2-6].

Способом, аналогичным изложенному в данной работе, можно решить плоскую задачу об электризации диэлектрической жидкости.

Авторы благодарят В. В. Гогосова за полезные замечания при обсуждении работы.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
 2. *Kozsman I., Gavis J.* Development of charge in low-conductivity liquids flowings past surfaces. Engineering predictions from the theory developed for tube flow. Chem. Engng Sci., 1962, vol. 17, No. 12.
 3. *Kozsman I., Gavis J.* Development of charge in low-conductivity liquids flowing past surfaces. Experimental verification and application of the theory developed for tube flow. Chem. Engng Sci., 1962, vol. 17, No. 12.
 4. *Гогосов В. В., Никифорович Е. И., Толмачев В. В.* Электризация слабопроводящей жидкости, текущей по металлической трубе. Тезисы докл. 9-го Рижск. совещания по магнитной гидродинамике, т. 1. Рига, 1978. Саласпилс. Изд-во Ин-та физики АН Латв. ССР, 1978.
 5. *Захарченко В. В., Крячко Н. И., Мажара Е. Ф., Севриков В. В., Гавриленко Н. Д.* Электризация жидкостей и ее предотвращение. М., «Химия», 1975.
 6. *Electrostatics in petroleum industry.* Amsterdam, Elsevier, 1958.
 7. *Киреев В. А.* Курс физической химии. М., «Химия», 1975.
 8. *Арсенин В. Я.* Математическая физика. М., «Наука», 1966.
 9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973, стр. 237–252.
 10. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1964, стр. 308–315.
-