МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1979

УДК 532.516.5

О ШНЕКОВОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Н. А. СЛЕЗКИН

(Москва)

Рассматривается установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с винтовыми линиями тока в цилиндрической бесконечной трубе, внутри которой вращается шнек. Дан вывод обобщенных линеаризированных уравнений Озеена, один класс точных решений которых совпадает с соответствующим классом точных решений полных уравнений Навье – Стокса.

1. Если взять полные уравнения Навье – Стокса в цилиндрических координатах для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости, то для одного класса хорошо известных точных решений этих уравнений имеем следующие выражения для скоростей v_r, v_α, v_z и давления p:

$$v_r=0,\qquad v_\alpha=\frac{A_2}{r}+B_2r$$

$$v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}r^2+A_3\ln r+B_3 \tag{1.1}$$

$$p=\frac{\partial p_1}{\partial z}z+\rho\int v_\alpha{}^2\frac{dr}{r}+D$$

Здесь A_k, B_k и D — постоянные величины, определяемые из соответствующих граничных условий. В классе решений (1.1) содержатся чисто прямолинейно-параллельные течения, круговые течения по концентрическим окружностям и винтовые течения между двумя концентрическими цилиндрами с расходами, не зависящими от угловой скорости вращения одного из цилиндров. Покажем, что решения (1.1) можно использовать для приближенного описания течения с винтовыми линиями тока для случая, когда жидкость с внешней стороны ограничена поверхностью неподвижного цилиндра, а с внутренней — винтовой поверхностью вращающегося шнека. Такого рода течение естественно назвать шнековым, так как термин «винтовое» использован Громекой для наименования течений жидкости для случая, когда вектор скорости частиц совпадает с вектором вихря этих же частиц.

Пусть поверхность вращающегося шнека будет представлена уравнениями $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $z=h(r)\alpha$, где $h(r)$ — переменный шаг винтовой поверхности. Обозначим цилиндрические координаты частиц жидкости, прилипших к поверхности шнека, теми же буквами, но со звездочкой вверху; тогда будем иметь $z^*=h(r)\alpha^*$. Дифференцируя это равенство по времени и вводя обозначения скоростей, получим

$$v_z{}^*=\frac{dh}{dr}\alpha^*v_r{}^*+\frac{h}{r^*}v_\alpha{}^* \tag{1.2}$$

Таким образом, если поверхность шнека отличается от прямого геликоида (h=const), то скорость v_z^* будет линейно зависеть от скоростей v_r^* и v_α^*, а коэффициенты будут зависеть не только от r^*, но и от угла α^*. Но если первое слагаемое в (1.2) будет малым по сравнению со вторым, то с некоторым приближением можно положить

$$v_z^* = \frac{h}{r^*} v_\alpha^* \tag{1.3}$$

Предположим теперь, что соотношения $z^*=h(r)\alpha^*$ (1.3) выполняются не только для частиц, прилипших к поверхности шнека, но и для всех остальных частиц жидкости; тогда уравнение несжимаемости можно представить в одном из двух следующих видов:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+2r\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+2\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}=0 \tag{1.4}$$

Принимая для v_r выражение (1.1), из равенств (1.4) и (1.3) получим, что скорости v_α и v_z не будут зависеть ни от z, ни от α, а тогда из полных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости можно получить только остальные выражения (1.1) для скоростей v_α и v_z и давления p. Таким образом, действительно при допущении справедливости соотношения (1.3) для всех частиц жидкости для описания соответственного шнекового течения можно использовать равенства (1.1); вопрос только в том, как определить произвольные постоянные, входящие в (1.1).

Обозначим радиус неподвижного цилиндра, ось которого совпадает с осью вращения шнека, через b. При выполнении условия прилипания частиц жидкости к поверхности этого цилиндра из равенств (1.1) получим

$$\begin{gathered}
v_r=0,\qquad v_\alpha=\frac{A_2}{b^2r}(b^2-r^2)\\
v_z=-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}(b^2-r^2)-A_3\ln\frac{b}{r}\\
p=D+\frac{\partial p_1}{\partial z}z+\frac{1}{2}\rho\frac{A_2^2}{b^4}\left(r^2-\frac{b^4}{r^2}-4b^2\ln r\right)\\
\frac{v_z}{v_\alpha}=-\frac{1}{A_2}\left(\frac{1}{4\mu}b^2r\frac{\partial p_1}{\partial z}+A_3\frac{b^2r}{b^2-r^2}\ln\frac{b}{r}\right)\\
\left(\frac{v_z}{v_\alpha}\right)_{r\to b}=-\frac{b}{2A_2}\left(A_3+\frac{b^2}{2\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Из выражения (1.5) для давления следует, что при уменьшении r давление может стать отрицательным, что должно быть исключено. Обозначим через a то значение r, при котором давление окажется равным критическому давлению p_k, допускаемому свойством рассматриваемой несжимаемой жидкости. Если обозначить статическое давление в начальном сечении цилиндра при $r=b$ через p_0, то будем иметь

$$\begin{gathered}
p_0=D-2A_2^2\frac{\rho}{b^2}\ln b\\
p_k=D+\frac{\partial p_1}{\partial z}l+\frac{1}{2}\rho\frac{A_2^2}{a^2b^4}(a^4-b^4-4a^2b^2\ln a)
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где l — протяженность внешнего цилиндра, связанная с перепадом статического давления от p_0 до некоторого значения p_a соотношением

$$(1.7)\qquad \frac{\partial p_1}{\partial z}=-\frac{p_0-p_a}{l}$$

Из равенств (1.6) и (1.7) можно определить значения D и a, если будут заданы p_0, p_a, p_k и A_2. Значение же постоянного A_2 можно определить из кинематического условия задания угловой скорости шнека ω; тогда из выражения (1.5) для линейной скорости v_α точек шнека, расположенных на поверхности с критическим давлением p_k, получим

$$(1.8)\qquad A_2=\omega\frac{b^2a^2}{b^2-a^2}$$

Чтобы получить значение постоянного A_3, можно использовать условие (1.3) для значения r, близкого к b, и при этом можно воспользоваться последним равенством (1.5); тогда получим

$$(1.9)\qquad A_3=-\frac{1}{2\mu}b^2\frac{\partial p_1}{\partial z}-2\omega\frac{a^2h_b}{b^2-a^2}$$

где h_b — шаг винтовой поверхности шнека вблизи поверхности внешнего неподвижного цилиндра.

Таким образом, при выполнении всех перечисленных выше условий получим следующее выражение для продольной скорости:

$$(1.10)\qquad v_z=\frac{1}{4\mu l}(p_0-p_a)\left(b^2-r^2-2b^2\ln\frac{b}{r}\right)+2\omega\frac{a^2h_b}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{r}$$

Так как равенства (1.5) не пригодны для области течения, в которой давление ниже критического, то при подсчете объемной величины расхода Q необходимо за нижний предел брать значение $r=a$, т. е.

$$(1.11)\qquad Q=2\pi\int\limits_a^b v_z r\,dr$$

Если ввести обозначение $x=a^2/b^2$, то из равенств (1.6) и (1.7) можно получить следующее уравнение для заранее неизвестной величины x:

$$\frac{x}{(1-x)^2}(1-x^2+2x\ln x)=\frac{2}{\rho b^2\omega^2}(p_a-p_k)$$

Тогда выражение объемной величины расхода Q, полученное из (1.10) и (1.11), можно представить в виде

$$(1.12)\qquad Q=\frac{\pi}{32\mu}\frac{p_0-p_a}{l}b^4(x^2+8x\ln x-1)+\pi\omega h_b b^2\frac{x}{1-x}(1-x^2+2x\ln x)$$

Известно, что при шнековом течении жидкости объемный расход существенно зависит от угловой скорости вращения шнека и шага винтовой поверхности шнека. Полученная формула (1.12) по крайней мере качественно согласуется с этим известным из практики применения шнековых сооружений результатом. Однако следует иметь в виду, что зависимость Q от угловой скорости вращения шнека не является линейной именно из-за того, что безразмерная величина x (1.12) в свою очередь сложным образом зависит от квадрата угловой скорости вращения шнека, радиуса внешнего цилиндра и давления p_a в конечном сечении шнека.

Как уже сказано, полученные выше формулы приближенно описывают шнековое течение в цилиндрической трубе при выполнении гипотезы (1.3) для всех частиц жидкости, т. е. при выполнении гипотезы, имеющей вид $v_z/v_\alpha=h/r$. Для прямого гелиокоида шаг винта h постоянный. При приближенном подходе шнек не оказался прямым гелиокоидом, так как из равенств (1.5), (1.8), 1.9) и $x=a^2/b^2$ даже при отсутствии перепада давления ($\partial p_1/\partial z=0$) получим

$$\left(\frac{v_z}{v_\alpha}\right)_a=-\frac{h_b}{b}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1-x}$$

т. е. шаг винтовой поверхности оказался непостоянным. Например, при $x=0.5$ шаг винтовой поверхности полученного шнека при $r=a$ будет отличаться от шага винтовой поверхности при $r=b$ не более чем на 20%. Это и значит, что допущение (1.3) может вносить ошибку тоже порядка 20%.

2. Весьма вероятно, что переменность шага винтовой поверхности шнека, полученная в п. 1, обусловлена тем, что были использованы лишь приближенные решения (1.1) уравнений Навье — Стокса, в которых исключались зависимости скоростей и давлений от двух переменных z и α. При подключении зависимостей всех величин от z и α уравнения Навье — Стокса становятся нелинейными и использование их для изучения шнекового течения в трубе без использования вычислительных машин становится невозможным. В таком случае представляется полезным воспользоваться той идеей, которая в последнее время стала применяться в кинетической теории газов, когда нелинейный оператор столкновений в уравнении Больцмана стал заменяться линейным оператором, но таким, который сохраняет основные особенности нелинейного оператора столкновений. Если придерживаться этой идеи, то можно нелинейные слагаемые в полных уравнениях Навье — Стокса для установившегося течения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах, конечно приближенно, заменить группой соответственных линейных слагаемых с переменными коэффициентами, но такой группой, при которой полученные линеаризированные уравнения сохраняли бы в числе своих полных решений и точные решения полных уравнений Навье — Стокса, представляемые равенствами (1.1). Следует заметить, что эта идея впервые практически и была применена Озееном, с той только разницей, что сохранялся только самый простой интеграл уравнений Навье — Стокса, а именно представляющий собой прямолинейно-параллельное течение жидкости с постоянной скоростью. При требовании сохранения всех интегралов (1.1) полных уравнений Навье — Стокса полученные приближенные линеаризированные уравнения можно назвать обобщенными уравнениями Озеена. Для получения такого рода уравнений надо в полных уравнениях Навье — Стокса положить

$$\begin{aligned}&v_r=v_r'\\ (2.1)\qquad &v_\alpha=\frac{A_2}{r}+B_2r+v_\alpha'=V(r)+v_\alpha'\\ &v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}r^2+A_3\ln r+B_3+v_z'=W(r)+v_z'\end{aligned}$$

пренебречь слагаемыми с произведениями возмущений всех скоростей и вернуться к прежним обозначениям, полагая $v_r'=v_r$, $v_\alpha'=v_\alpha-V$, $v_z'=v_z-W$. Этим способом получим следующие обобщенные уравнения Озеена:

$$\frac{V}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \alpha}+W\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{V}{r}(V-2v_\alpha)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}\right).$$

$$(2.2)\qquad v_r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}+W\frac{\partial v_\alpha}{\partial z}+\frac{1}{r}Vv_r=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\nu\left(\Delta v_\alpha-\frac{v_\alpha}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \alpha}\right)$$

$$v_r\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{V}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \alpha}+W\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z$$

$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+r\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}=0$$

Легко проверить, что в числе точных решений системы уравнений (2.2) будут находиться и решения вида

$$v_r=0,\quad v_\alpha=V(r),\quad v_z=W(r)$$

$$p=\frac{\partial p_1}{\partial z}z+\rho\int V^2\frac{\partial r}{r}+D$$

Полученные обобщенные уравнения Озеена (2.2) можно использовать не только для уточнения полученного в п. 1 приближенного решения задачи о шнековом течении в цилиндрической трубе в сторону учета некоторых особенностей у торцовых сечений трубы, но и для изучения развития закрученного течения в трубе без наличия шнека.

Поступила 15 XI 1978