

Здесь ω_i — угловая скорость падающей на поверхность молекулы. Предварительные расчеты с произвольным значением α_R показали достаточно слабое влияние α_R на аэродинамические характеристики пластины и поля течения. Поэтому в большинстве случаев для установления максимального влияния коэффициента аккомодации, вращательной энергии молекул на поверхности расчеты проводились при $\alpha_R=1$ и 0.

В случае $\alpha_R=0$ угловая скорость молекул после столкновения с поверхностью принималась равной угловой скорости до столкновения, а не определялась в соответствии с (3.2).

На фиг. 2 представлено распределение вращательной температуры в двух сечениях, перпендикулярных пластине, проходящей через переднюю и заднюю кромки, для угла атаки $\alpha=15^\circ$, $S_\infty=18.26$, $T_w=0.1 T_0$, $Re_0=20$, $Z_R=10$. Кривые 1–4 соответствуют $\alpha_R=0, 0.5, 0.75, 1$. Интересно отметить, что в случае, когда вращательная температура в поле течения около пластины меньше температуры поверхности, уменьшение α_R приводит к уменьшению T_R (поле температуры у передней кромки). В другом случае — поле температуры у задней кромки, когда $T_R > T_w$, — уменьшение α_R приводит к увеличению T_R .

На фиг. 3 представлены результаты расчета коэффициента сопротивления C_x и коэффициента C_h (кривые 1 и 2) в зависимости от угла атаки α для случая: $S_\infty=18.26$, $T_w=0.1 T_0$, $Re_0=20$, $Z_R=10$. На фиг. 3 кривые соответствуют коэффициенту аккомодации вращательной энергии $\alpha_R=1$, символом 3 отмечены расчетные точки для случая $\alpha_R=0$. Кроме расчетов, результаты которых представлены на фигуре, были проведены расчеты для различных Re_0 и для случая горячей стенки ($T_w=T_0$), а также проводился ряд расчетов для разных S_∞ и Z_R .

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. Изменение аккомодации вращательной энергии на аэродинамические характеристики оказывает слабое влияние. Изменение α_R оказывает существенное влияние на теплопередачу на поверхности пластины в случае холодной стенки ($T_w=0.1 T_0$) при больших углах атаки $\alpha \geq 30^\circ$ и в случае горячей стенки ($T_w=T_0$) при $\alpha \leq 45^\circ$. Существенное влияние изменение α_R оказывает также на распределение вращательной температуры.

Поступила 6 VII 1978.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vogenitz F. W., Broadwell J. E., Bird G. A. Leading edge flow by Monte-Carlo direct simulation technique. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 3.
2. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1.
3. Горелов С. Л., Ерофеев А. И. Влияние внутренних степеней свободы на обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.
4. Черемисин Ф. Г. Численное исследование влияния характеристик взаимодействия газ — поверхность на движение разреженного газа. В сб. «Численные методы в динамике разреженных газов», вып. 2. М., ВЦ АН СССР, 1975.

УДК 534.222.2

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗА НЕСТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

М. В. ПИСКАРЕВА, Ф. В. ШУГАЕВ

(Москва)

Рассматривается распределение плотности за нестационарной ударной волной при определенном значении числа Маха M_* , зависящем от $\gamma=c_p/c_v$.

Используется ранее установленный факт [1], что при $M=M_*(\gamma)$ существует связь между первой и второй производными плотности по нормали за волной. Исследован вид профиля плотности в безразмерных переменных за плоской, цилиндрической и сферической ударными волнами в окрестности фронта волны. В первом случае, если газ перед волной однороден, возможны только два вида профиля плотности (с точностью до малых третьего порядка по координате). Во втором и третьем случаях вид распределения плотности зависит еще от одного параметра — отношения первой производной по нормали плотности за волной к радиусу кривизны волны.

Пусть нестационарная ударная волна произвольной формы распространяется по неоднородному газу. Предполагается, что плотность, давление, скорость газа за волной представляют собой гладкие функции координат и времени.

Введем лагранжевы переменные a^i , беря в качестве исходного состояние газа перед волной в начальный момент времени. Уравнение движения имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = F^i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} \quad (i=1, 2, 3)$$

где x^i — эйлерова координата частицы, ρ — плотность, p — давление, F^i — плотность массовых сил. Найдем разность значений $\partial^2 x^i / \partial t^2$ слева и справа от фронта волны и умножим ее на проекцию внешней единичной нормали n^i в эйлеровых переменных

$$(2) \quad n^i \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \right] = - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right]$$

$$[A] = A_2 - A_1, \quad \partial / \partial n = n^i \partial / \partial x^i$$

Индексы 1 и 2 относятся к состоянию перед и за волной соответственно.

Кинематическое условие совместности второго порядка $[1-3]$ дает возможность выразить левую часть (2) через производные параметров газа по координате и вдоль луча

$$(3) \quad n^i \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \right] = CG^2 - 2G \frac{d\varepsilon}{dt} + (1-\varepsilon) \frac{dG}{dt} + G(1-\varepsilon) n^m \frac{\partial^2 x_1^m}{\partial v \partial t}$$

$$d/dt = \partial / \partial t + G \partial / \partial v, \quad \partial / \partial v = v^i \partial / \partial a^i, \quad \varepsilon = \rho_1 / \rho_2$$

$$C = \varepsilon (\partial \rho_1 / \partial n - \varepsilon \partial \rho_2 / \partial v - 2\rho_1 H(1-\varepsilon)) / \rho_1$$

Здесь G — скорость ударной волны относительно газа перед волной, v^i — проекции единичной нормали в переменных Лагранжа, H — средняя кривизна поверхности фронта волны. Выражение (3) относится к начальному моменту времени.

Из (2), (3) определяется изменение скорости ударной волны (или ее числа Маха) вдоль луча $[1, 3, 4]$

$$\frac{dG}{dt} = \Phi \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial n}, H, \zeta_k, \frac{\partial \zeta_k}{\partial n}, \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right)$$

где ζ_k — параметры газа перед волной.

Продифференцируем уравнение (1) по t , найдем разность $[\partial^3 x^i / \partial t^3]$ и умножим ее на n^i

$$(4) \quad n^i \left[\frac{\partial^3 x^i}{\partial t^3} \right] = - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right] + \frac{dn^i}{dt} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} \right] + Gn^i \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} \right]$$

Из (2) получаем

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(n^i \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \right] \right) = - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right]$$

Левые части в (4), (5) определим из уравнения (3), кинематического условия совместности третьего порядка и выражения для производной по времени единичной нормали $[1, 2]$; получим систему двух уравнений относительно двух величин ($d^2 M / dt^2$ и $d/dt(\partial \rho_2 / \partial n)$).

Для термодинамически равновесного газа с уравнением состояния $p = p(\rho, s)$ (где s — энтропия) система имеет вид

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_1 c_1} (c_2^2 - \varepsilon^2 G^2) \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_2}{\partial n} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^2 G^2 - c_2^2} \{c_2^2 + 3\varepsilon^2 G^2 - f(3\varepsilon^2 G^2 - c_2^2)\} \frac{d^2 M}{dt^2} = \Phi_1$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1} (c_2^2 - 3\varepsilon^2 G^2) \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_2}{\partial n} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^2 G^2 - c_2^2} (c_2^2 + 5\varepsilon^2 G^2 - 3\varepsilon^2 G^2 f) \frac{d^2 M}{dt^2} = \Phi_2$$

$$\Phi_i = \Phi_i \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial n}, \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial n^2}, \frac{\partial \zeta_k}{\partial n}, \frac{\partial \zeta_k}{\partial t}, \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial n \partial t}, \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2}, \right.$$

$$\left. (\nabla M)^2, \Delta M, (\nabla \zeta_k)^2, \Delta \zeta_k, H, K \right)$$

$$f = p_{s2}(1 - \epsilon) / (\rho_1 T_2), \quad p_{s2} = (\partial p_2 / \partial s_2)_p$$

$$(\nabla A)^2 = (\partial A / \partial l_1)^2 + (\partial A / \partial l_2)^2, \quad \Delta A = \partial^2 A / \partial l_1^2 + \partial^2 A / \partial l_2^2$$

Здесь T — температура, c — скорость звука, K — гауссова кривизна поверхности фронта волны, l_1, l_2 — дуги нормальных сечений поверхности фронта волны.

Детерминант системы (6) при некотором значении числа Маха $M = M_*$ может обратиться в нуль. Для термодинамически равновесного газа это число Маха определяется из соотношения

$$2\epsilon^2(2 - 3f)M^4(c_1/c_2)^4 + (4 + 3f)M^2(c_1/c_2)^2 - f/\epsilon^2 = 0$$

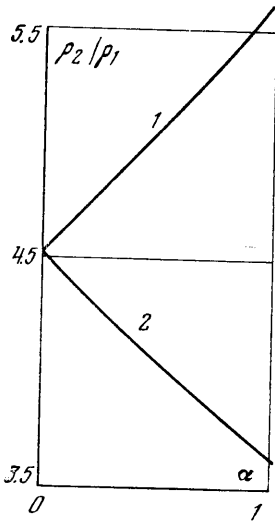
Для совершенного газа ($\gamma = \text{const}$) величина M_*^2 — корень алгебраического уравнения третьей степени [3], коэффициенты которого зависят от γ . При $\gamma \rightarrow 1$ и $\gamma \rightarrow 2$ величина M_* неограниченно возрастает

$$M_* \approx \sqrt{2}(\gamma - 1)^{-1/2}, \quad \gamma \sim 1;$$

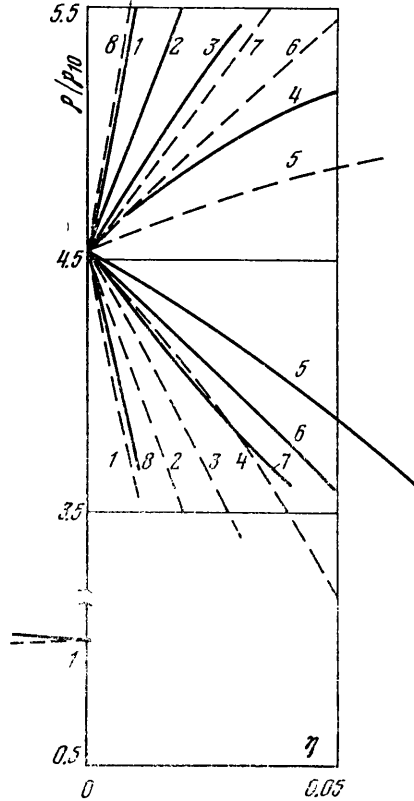
$$M_* \approx \sqrt{9.5}(2 - \gamma)^{-1/2}, \quad \gamma \sim 2$$

При $\gamma \geq 2$ и $1 < M < \infty$ детерминант в нуль не обращается.

Обращение в нуль детерминанта дает связь между



Фиг. 1



Фиг. 2

первой и второй производными по нормали от плотности за нестационарной ударной волной в той точке поверхности фронта, где $M = M_*$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial n^2} = A_1(M_*, \zeta_k) \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial n} \right)^2 + A_2(M_*, \zeta_k) \frac{\partial \rho_2}{\partial n} \frac{\partial \zeta_k}{\partial n} +$$

$$+ \Psi \left(M_*, \zeta_k, \frac{\partial \zeta_k}{\partial n}, (\nabla M)^2, \Delta M, (\nabla \zeta_k)^2, \Delta \zeta_k, H, K \right)$$

Здесь и далее предполагается, что газ перед волной покоится.

Рассмотрим одномерное движение совершенного газа. Пусть перед волной газ однороден. Уравнение (7) принимает вид

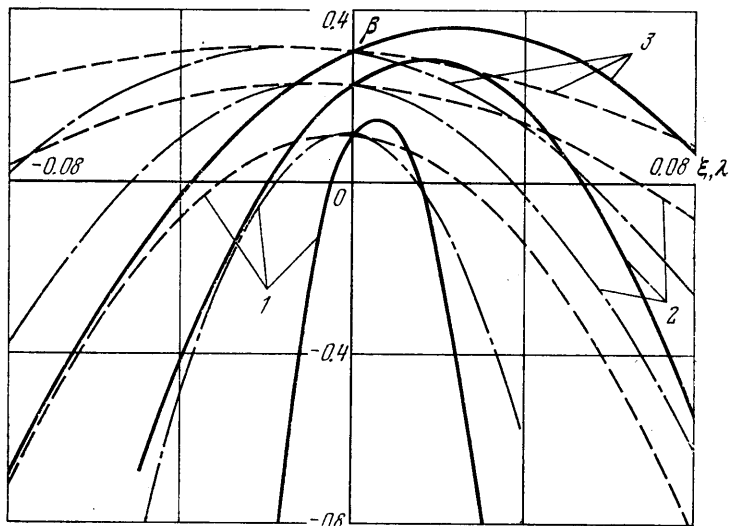
$$\rho_{2xx} / \rho_1 = A_1(\gamma) (\rho_{2x} / \rho_1)^2, \quad \rho_{xx} = \partial^2 \rho / \partial x^2, \quad \rho_x = \partial \rho / \partial x$$

При $1 < \gamma < 2$ величина A_1 всегда положительна. Следовательно, положительна и вторая производная по нормали от плотности за волной. Значение плотности

в окрестности фронта ($x=0$) выражается следующим образом:

$$\rho_2(x, t)/\rho_1 = \rho_2(0, t)/\rho_1 + x\rho_{2x}(0, t)/\rho_1 + 1/2 A_1 x^2 \rho_{2xx}(0, t)/\rho_1^2 + \dots$$

Распределение плотности за волной в зависимости от $\alpha = -x|\rho_{2x}(0)|/\rho_1$ с точностью до малых третьего порядка относительно расстояния до фронта показано на фиг. 1 ($\gamma=1.4$) для $\rho_{2x}(0) < 0$ (кривая 1) и $\rho_{2x}(0) > 0$ (кривая 2).



Фиг. 3

Пусть перед волной плотность меняется по линейному закону. Выражение для второй производной плотности за волной записывается так:

$$\rho_{2xx}/\rho_{10} = A_1(\gamma) (\rho_{2x}/\rho_{10})^2 + A_2(\gamma) \rho_{2x}\rho_{1x}/\rho_{10}^2 + A_3(\gamma) (\rho_{1x}/\rho_{10})^2, \quad \rho_{10} = \rho_1(0)$$

В этом случае знак второй производной зависит от отношения $\lambda = \rho_{1x}(0)/\rho_{2x}(0, t)$.

Плотность за волной равна

$$\frac{\rho_2(x, t)}{\rho_{10}} = \frac{\rho_2(0, t)}{\rho_{10}} + x \frac{\rho_{1x}(0)}{\rho_{10}\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{x\rho_{1x}}{\rho_{10}} \right)^2 \left(\frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda} + A_3 \right)$$

Распределение плотности за волной ($\gamma=1.4$) с точностью до малых третьего порядка построено на фиг. 2 для возрастающей (сплошные линии) и убывающей (пунктир) плотности невозмущенного газа в зависимости от $\eta = -x|\rho_{1x}|/\rho_{10}$.

Кривым 1-8 соответствуют следующие значения λ : -0.01, -0.019, -0.03, -0.05, 0.1, 0.054, 0.04, 0.01. Величина $\rho_{2xx} > 0$ при $\lambda = -0.01, 0.04, 0.01$, $\rho_{2xx} = 0$ при $\lambda = -0.019, 0.054$, $\rho_{2xx} < 0$ при $\lambda = -0.03, -0.05, 0.1$.

Для цилиндрических и сферических волн, распространяющихся по однородному газу, получаем при $M=M_*$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial n^2} = A_1(\gamma) \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial n} \right)^2 + \frac{B_1(\gamma)}{R\rho_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial n} + \frac{B_2(\gamma)}{R^2}$$

где R — радиус волны.

Из этого выражения следует, что вторые производные плотности по нормали за расходящейся ($R < 0$) и сходящейся ($R > 0$) ударными волнами одного и того же радиуса совпадают, если первые производные плотности равны по величине и противоположны по знаку. Знак второй производной зависит от безразмерной величины

$$\xi = \rho_1/(R\rho_{2n}(0)), \quad \rho_{2n} = \partial \rho_2 / \partial n$$

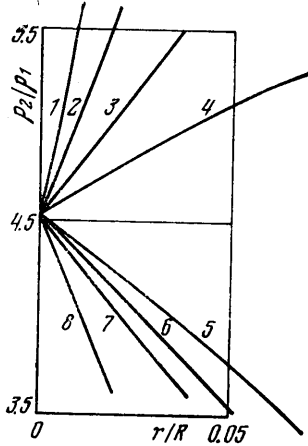
На фиг. 3 показана зависимость величины $\beta = \rho_1 \rho_{2xx} / \rho_{2x}^2$ от λ для плоской волны (сплошные кривые), а также зависимость β от ξ для цилиндрических (штрихо-

вые линии) и сферических (штрихпунктирные линии) волн при следующих значениях γ : 1 - $\gamma=1.1$, 2 - $\gamma=1.4$, 3 - $\gamma=1.67$.

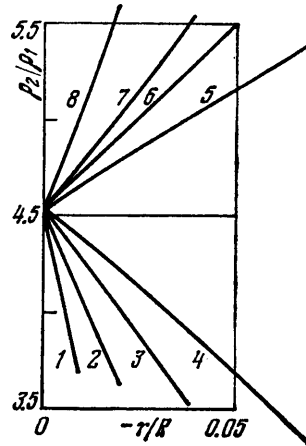
Плотность за цилиндрической или сферической волной равна

$$\frac{\rho_2(r, t)}{\rho_1} = \frac{\rho_2(0, t)}{\rho_1} + \frac{r}{R\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\xi^2} + \frac{B_1}{\xi} + B_2 \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Распределение плотности за расходящимися и сходящимися сферическими волнами в однородном газе ($\gamma=1.4$) показано на фиг. 4 и 5. Точка $r/R=0$ соответ-



Фиг. 4



Фиг. 5

ствует фронту волны. Значения параметра ξ на кривых 1-8 равны соответственно 0.01, 0.02, 0.038, 0.07, -0.07, -0.052, -0.04, -0.02. Производная $\partial^2 \rho_2 / \partial n^2 = \rho_{2nn} > 0$ при $\xi = 0.01, 0.02, -0.04, -0.02$, $\rho_{2nn} = 0$ при $\xi = 0.038, -0.052$, $\rho_{2nn} < 0$ при $\xi = 0.07, -0.07$.

Итак, если известно, в какой из областей на фиг. 3 заключена величина ξ или соответственно λ , то это позволяет при $M=M_*$ найти вид профиля плотности за волной в окрестности фронта (с точностью до малых третьего порядка относительно расстояния до фронта).

Поступила 25 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискарева М. В., Шугаев Ф. В. О дифференциальных соотношениях на нестационарной ударной волне. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
2. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
3. Шугаев Ф. В. О движении ударных волн в газе с переменными параметрами. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 3.
4. Wright T. W. An intrinsic description of unsteady shock waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1976, vol. 29, pt 3.