

Умножим уравнение (5) на u и проинтегрируем полученное равенство по u от $-\infty$ до $+\infty$. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u \left(k u w + \frac{\partial}{\partial u} k^2 J(u) w \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(k u w + \frac{\partial}{\partial u} k^2 J(u) w \right) du = -k f$$

При интегрировании учитывается, что величина w очень быстро убывает с ростом $|u|$. Из полученного соотношения следует, что

$$(9) \quad f(u_1, t) = u_1 \exp(-kt), \quad \langle u(0) u(\alpha) \rangle = \langle u^2 \rangle \exp(-k\alpha)$$

Подставляя (9) в (7) и положив $\alpha = \tau - \xi$, $\beta = \tau + \xi$, получим

$$(10) \quad \langle x^2 \rangle = \langle u^2 \rangle \left\{ \int_0^t d\beta \int_0^\beta \exp(-k\alpha) d\alpha + \int_t^{2t} d\beta \int_0^{2t-\beta} \exp(-k\alpha) d\alpha \right\} = \\ = \frac{2\langle u^2 \rangle}{k^2} [\exp(-kt) + kt - 1]$$

Как известно, для достаточно больших t коэффициент диффузии

$$(11) \quad D = \frac{\langle x^2 \rangle}{2t} = \frac{\langle u^2 \rangle}{k} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{u^2}{J(u)} \exp\left(-\frac{1}{k} \int_0^u \xi d\xi\right) \right] \times \\ \times \left[k \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{1}{J(u)} \exp\left(-\frac{1}{k} \int_0^u \xi d\xi\right) \right]^{-1}$$

Таким образом, при указанных выше предположениях коэффициент диффузии D определяется формулой (11). Все статистические характеристики турбулентного потока входят в (11) в виде функции $J(u)$, которая определена формулой (4). Следовательно, задание пространственно-временных корреляций скорости турбулентного потока полностью определяет коэффициент диффузии D .

Следует, однако, отметить, что применимость формулы (11) довольно ограничена. Уравнение (1) правильно описывает движение шарика только при движении с малыми числами Рейнольдса и, следовательно, при не слишком больших скоростях v и достаточно малых R . С другой стороны, радиус R не может быть как угодно малым, так как с убыванием R коэффициент k растет и может оказаться настолько большим, что первое из условий (3) не будет выполняться.

Поступила 4 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

- Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
- Соу С. Л. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.

УДК 532.546

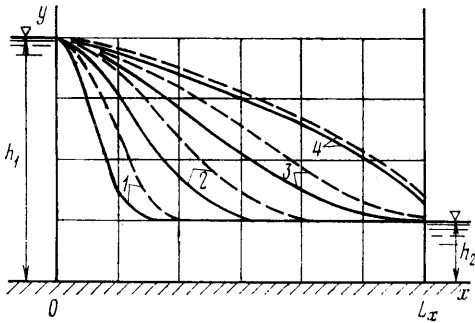
О МОДЕЛИРОВАНИИ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. КОРОЛЕВ, М. И. ШВИДЛЕР

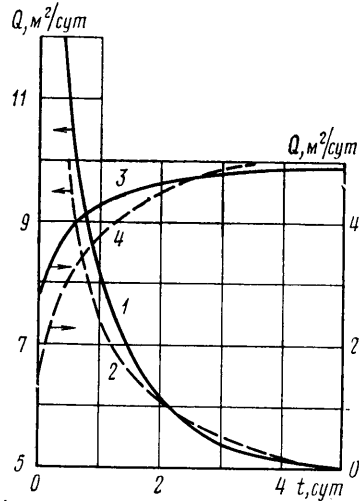
(Москва)

Фильтрация грунтовых вод традиционно изучается как течение лишь одного флюида — воды, движением газовой фазы — воздуха обычно пренебрегают. При этом либо допускается существование зоны с неполным, обусловленным капиллярными силами насыщением порового пространства грунта водой, либо предполагается, что такой зоны нет и область течения воды ограничена некоторой свободной поверхностью, давление на которой постоянно. Последняя схематизация носит название безнапорной фильтрации [1].

К задачам безнапорной фильтрации часто сводится исследование течения воды через проницаемые переемы различной формы (плотины, дамбы), задачи о фильтрации воды возле дрен, колодцев, скважин, водоемов и т. д., возникающие при изучении проблем мелиорации и ирригации. Решение задач безнапорной фильтрации связано со значительными трудностями из-за неизвестного наперед положения свободной поверхности. В [2] предложен метод сглаживания локальных особенностей, позволяющий рассчитывать динамику процесса фильтрации и стационарный режим без явного выделения свободной поверхности. Решение задач безнапорной филь-



Фиг. 1



Фиг. 2

рации упрощается, если принять предположения гидравлической теории [1], что допустимо, однако, далеко не всегда.

Ниже рассматривается метод моделирования безнапорной (а также напорно-безнапорной и напорной) фильтрации, основанный на учете ряда факторов, присущих реальным физическим системам. В действительности в грунте происходит совместное движение воды и газа (воздуха), для которого характерны неполнота вытеснения одного флюида другим и наличие капиллярных эффектов. Включение этих факторов, безусловно, повышающее адекватность математической модели натуре, приводит к рассмотрению задач двухфазной фильтрации водогазовых систем, для которых в настоящее время разработаны эффективные алгоритмы сквозного счета и соответствующие программы.

1. Совместное течение двух несжимаемых, несмешивающихся, весомых флюидов в произвольной неоднородной пористой среде в предположении, что главные оси тензора абсолютной проницаемости совпадают с координатными осями, может быть описано уравнениями [3]

$$(1.1) \quad \text{div } \mathbf{w} = 0$$

$$(1.2) \quad \text{div } \mathbf{w}_1 + m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

$$(1.3) \quad \mathbf{w} = - \left(\frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right) K (\text{grad } p_2 - \rho g - \varphi \text{ grad } p_c)$$

$$(1.4) \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{w} \varphi + \Delta \rho \psi K \mathbf{g} + \psi K \text{ grad } p_c$$

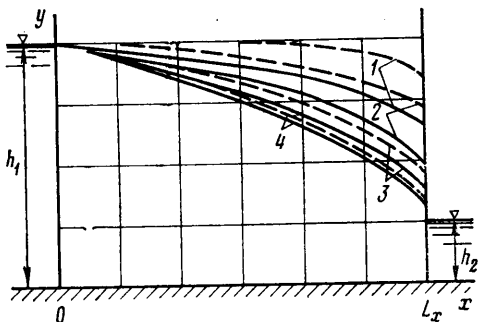
$$(1.5) \quad p_c = p_c(\bar{k}, \sigma) = p_2 - p_1, \quad \varphi(\sigma) = f_1 / (f_1 + \mu_0 f_2),$$

$$\psi(\sigma) = f_2 \varphi / \mu_2, \quad \rho(\sigma) = \varphi \rho_1 + (1 - \varphi) \rho_2, \quad \Delta \rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mu_0 = \mu_1 / \mu_2$$

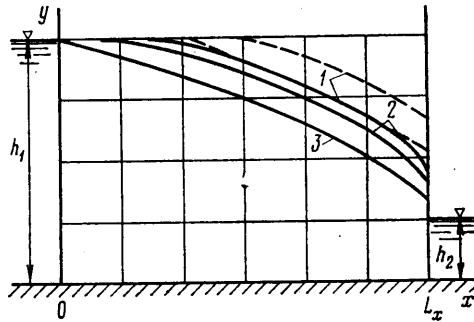
Здесь $K(x, y, z)$ — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, \bar{k} — некоторая его норма, σ , \mathbf{w}_1 — насыщенность и скорость фильтрации смачивающей фазы

(в гидрофильной среде — воды), $f_i(\sigma)$, p_i , μ_i , ρ_i — относительная фазовая проницаемость, давление, вязкость, плотность i -й фазы, p_c — капиллярное давление, m — пористость, g — ускорение силы тяжести, w — суммарная скорость фильтрации, x , y , z — пространственные координаты, t — время.

Для решения системы уравнений (1.1) — (1.5), дополненной соответствующими краевыми условиями, может быть использована условно устойчивая консервативная



Фиг. 3



Фиг. 4

разностная схема, при построении которой применялись интегральные аналоги законов сохранения [3]. Результатами численного решения служат данные о распределении водонасыщенности, давления, скоростей фильтрации в рассматриваемой области, об изменении этих параметров во времени.

2. Предлагаемый метод моделирования проиллюстрируем на примере классической задачи о безнапорной фильтрации через прямоугольную перемычку, точное решение которой для стационарного случая получено Полубариновой-Кочиной [1]. На фиг. 1, 3 приводятся обозначения, поясняющие постановку граничных и начальных условий для уравнений (1.1) — (1.5). Условие на левой границе перемычки толщиной L_x определяется гидростатическим распределением давления в соответствии с плотностью воздуха и воды при заданном ее уровне h_1 в верхнем бьефе

$$p(0, y, t) = \begin{cases} p_0 - \rho_2 g (y - h_1), & y \geq h_1 \\ p_0 + \rho_1 g (h_1 - y), & y \leq h_1 \end{cases}$$

где p_0 — давление на поверхности воды в верхнем бьефе.

Давление на правой границе перемычки также определяется гидростатикой, однако с учетом того, что уровень воды в нижнем бьефе — h_2 :

$$p(L_x, y, t) = \begin{cases} p_0 - \rho_2 g (y - h_1), & y \geq h_2 \\ p_0 + \rho_2 g (h_1 - h_2) + \rho_1 g (h_2 - y), & y \leq h_2 \end{cases}$$

Непроницаемость водоупора приводит к условию

$$w_y = w_{1y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x$$

Распределение флюидов в верхнем бьефе определяет и граничное условие по насыщенности на боковой поверхности перемычки

$$\sigma(0, y, t) = \begin{cases} \sigma_* = 0, & y > h_1 \\ \sigma_{**} = 1, & y \leq h_1 \end{cases}$$

где σ_* — насыщенность связанной водой, $(1 - \sigma_{**})$ — остаточная насыщенность воздухом. На боковой поверхности перемычки со стороны нижнего бьефа предполагается отсутствие «концевого эффекта» [4].

Рассматриваются две задачи, соответствующие двум различным состояниям системы. В первой рассматривается фильтрация воды из верхнего бьефа в сухой грунт с начальным уровнем воды в перемычке, определяемым уровнем воды h_2 в нижнем бьефе. Вторая задача соответствует мгновенному понижению уровня воды в правом бьефе по отношению к начальному, совпадающему с уровнем в левом бьефе и определявшему начальный уровень воды в перемычке. Указанным задачам соответствует одно и то же стационарное положение депрессионной поверхности и одинаковый промежуток высачивания, образующийся на правой границе перемычки.

Динамика процессов, изучаемых в этих задачах, стационарное положение депрессионной поверхности сопоставляются с результатами, полученными методом

сквозного счета с применением сглаживания локальных особенностей [2]. В расчетах использовались следующие функциональные зависимости и значения параметров: $f_1(\sigma) = \sigma^2$, $f_2(\sigma) = (1 - \sigma)^2$, $p_c(\sigma) = 0.05(1 - \sigma) / \sqrt{k}$ кгс/см², $\mu_1 = 1$ спуаз, $\mu_2 = 0.017$ спуаз, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 0.0013$ г/см³, $m = 0.5$, $k = 2.315$ дарси, $L_x = 12$ м, $h_1 = 8$ м, $h_2 = 2$ м.

В пренебрежении действием капиллярных сил сопоставляется положение депрессионной кривой в различные моменты времени. Принимая во внимание, что при рассмотрении безнапорного течения как процесса двухфазной фильтрации, в котором не происходит «поршневого» вытеснения одного флюида другим и существует зона с неполным насыщением грунта водой, положение депрессионной кривой (нанесенной пунктиром) будем сопоставлять с положением одной из изосат (линией равной насыщенности), например изосаты $\sigma = 0.9$ (нанесенной сплошной линией). На фиг. 1 представлена динамика депрессионной поверхности при затекании воды в сухой грунт ($1 - t = 0.086$, $2 - 0.374$, $3 - 1.170$, $4 - 4.846$ сут). Кривые 4 фактически определяют стационарное положение депрессионной поверхности. Динамика расходов воды через боковую поверхность перемычки со стороны верхнего бьефа сопоставляется на фиг. 2, где сплошной линией 1 представлены результаты данных расчетов, пунктирной линией 2 — результаты [2].

Рассматриваемая во второй задаче динамика опускания депрессионной поверхности показана на фиг. 3 ($1 - t = 0.252$, $2 - 0.655$, $3 - 1.915$, $4 - 4.15$ сут), здесь стационарное положение определяют кривые 4; соответствующие данной задаче расходы воды (у, м) сравниваются на фиг. 2.

Отмечая определенное различие в передаче динамики процессов, рассчитанных столь разными методами, укажем на близость кривых, характеризующих стационарное положение депрессионной поверхности, общее для обеих задач, а также на точное определение величины расхода воды в установившемся режиме (по теории безнапорной фильтрации расход $Q = 5$ м³/сут). Отметим также следующее явление, характерное для численного решения задач, рассматриваемых в качестве задач двухфазной фильтрации. В установившемся режиме вместо депрессионной поверхности, характерной для безнапорного течения, существует зона с неполным насыщением грунта водой, что является, по-видимому, следствием численного «размазывания», присущего разностным схемам. О величине этого «размазывания» можно судить по распределению водонасыщенности, представленному на фиг. 4 с помощью изосат $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.5$, $\sigma = 0.9$ (сплошными линиями 1, 2, 3). Если учесть действие капиллярных сил, зона с неполным насыщением становится существенно шире (изосаты, соответствующие тем же значениям насыщенности, нанесены на фиг. 4 пунктиром).

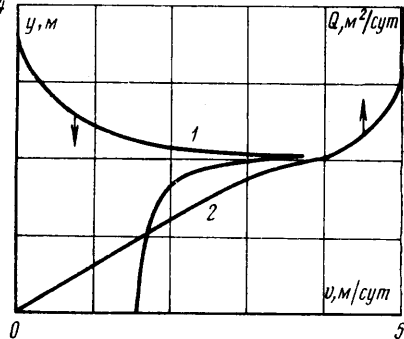
Учитывая некоторую неопределенность понятия депрессионной поверхности, а следовательно, и затруднительность определения промежутка высачивания при двухфазном подходе к расчету фильтрации через перемычку, интересно рассмотреть распределение скорости воды v вдоль ее боковой поверхности со стороны нижнего бьефа в установившемся режиме течения (фиг. 5, кривая 1). Как видно, максимальная скорость вытекания воды приходится на линию уровня воды в нижнем бьефе. Если проследить за изменением интегральной характеристики — величины расхода воды Q через боковую поверхность перемычки, считая от водоупора (фиг. 5, кривая 2), можно отметить, что 95% всего расхода приходится на подводную часть перемычки и часть перемычки высотой в 60 см, расположенную выше уровня воды в бьефе, которую, по-видимому, и можно принять за промежуток высачивания. Заметим также, что близкую к указанной величине промежутка высачивания получим, принимая в качестве депрессионной кривой изосату $\sigma = 0.9$ (фиг. 1, 3). Для сравнения укажем, что величина промежутка высачивания, полученная по графику [1], составляет 58 см. Отметим также, что полученные в расчетах распределения скорости вытекания воды по боковой поверхности перемычки для установившегося режима фильтрации практически совпадают для случаев с различным начальным состоянием системы и слабо меняются при учете капиллярных сил.

Авторы признательны П. Я. Полубариновой-Кочиной за внимание к работе.

Поступила 7 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., «Наука», 1977.
2. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. Киев, «Наукова думка», 1969.



Фиг. 5

3. Королев А. В., Шалимов Б. В., Швидлер М. И. Численное решение одномерных и двумерных задач фильтрации несмешивающихся жидкостей с учетом гравитационных и капиллярных сил. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1975.
4. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.

УДК 532.574.2.032

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ПОКАЗАНИЯ ПЛОСКИХ МИКРОТРУБОК ПОЛНОГО НАПОРА ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ ПОТОКА

Н. П. МИХАЙЛОВА, Е. У. РЕПИК

(Москва)

При измерении распределения скорости в пограничном слое в непосредственной близости от обтекаемой стенки, а также при измерении скорости в узких каналах и щелях широко используются плоские микротрубки полного напора. При малых числах Рейнольдса, рассчитанных по характерному размеру микротрубки и местным параметрам потока, уравнение Бернулли неприменимо для определения скорости потока по измеренному значению давления в помощью трубки полного напора. Из-за сил вязкости, которые в этом случае соизмеримы с инерционными силами, измеренное полное давление больше давления, рассчитанного с использованием уравнения Бернулли, т. е. коэффициент давления трубки полного напора становится больше единицы.

Имеющиеся в литературе опытные данные и теоретические решения по данному вопросу относятся главным образом к круглым трубкам полного напора [1-6]. Влияние вязкости потока на показания плоских микротрубок при малых скоростях потока исследовалось в [7]. Однако опыты [7] не носят характера систематического исследования и содержат отдельные сведения, не поддающиеся обобщению. Кроме того, в опытах [7] не рассматривались числа Рейнольдса $UH/\nu < 10$ (здесь H - наружная высота приемного отверстия плоской микротрубки), представляющие практический интерес при измерении скорости в вязком подслое турбулентного пограничного слоя.

В настоящей статье приводятся новые результаты экспериментального исследования коэффициента давления для плоских микротрубок полного напора в диапазоне изменения чисел Рейнольдса UH/ν от 4 до 100. Исследовались микротрубки с большим отношением ширины приемного отверстия B к высоте H ($B/H > 4.5$), которые обычно используются при измерении распределения скорости в пограничном слое. Из технологических соображений плоские микротрубки имели строго прямоугольное приемное отверстие, при этом трубки подбирались таким образом, чтобы можно было их систематизировать по характерным геометрическим размерам ($H = \text{const}$, $B = \text{var}$; $B = \text{const}$, $H = \text{var}$). Размеры микротрубок приведены ниже.

№ трубки	$H, \text{мм}$	$h, \text{мм}$	$B, \text{мм}$	$b, \text{мм}$	$D_T, \text{мм}$	$d_T, \text{мм}$	α	β	γ
1	0.2095	0.1175	1.3500	1.1815	0.3625	0.2130	6.44	10.06	0.587
2	0.2130	0.1240	1.9550	1.8100	0.3835	0.2065	9.17	14.60	0.538
3	0.2890	0.1975	1.3210	1.1360	0.4740	0.3360	4.57	5.75	0.709
4	0.2930	0.1750	1.9295	1.8255	0.5090	0.3190	6.58	10.42	0.626

Экспериментальное определение значений коэффициентов давления для плоских микротрубок проводилось в вертикальной аэродинамической трубе, схема которой представлена на фиг. 1. Забор воздуха в аэродинамическую трубу осуществлялся непосредственно из атмосферы с помощью вентилятора, установленного на выходе из рабочего канала трубы. Для расширения диапазона изменения скорости потока в рабочей части трубы была предусмотрена возможность установки лопаток рабочего колеса вентилятора под разными углами к набегающему потоку. Исследуемая микротрубка устанавливалась на оси аэродинамической трубы вблизи профилированного воздухозаборника вне пределов пограничного слоя, образующегося на стенках трубы.