УДК 532.529

# ДИФФУЗИЯ ТЯЖЕЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Е. В. ВОЗНЯКЕВИЧ, Е. В. НОМОФИЛОВ

*(Обнинск)*

В работе устанавливается связь между статистическими характеристиками турбулентного потока и коэффициентом диффузии взвешенных в этом потоке сферических частиц.

После появления работы Чена, результаты которой изложены в [1], было принято считать, что коэффициент диффузии твердых частиц в турбулентном потоке равен коэффициенту диффузии частиц жидкости. Однако, как показали экспериментальные исследования С. Соу с сотрудниками [2], коэффициенты диффузии твердых частиц и частиц жидкости могут отличаться в десять и более раз.

В теории Чена важным и вместе с тем вызывающим сомнение является предположение о том, что при движении твердой частицы в ее окрестности содержатся одни и те же жидкие частицы. Задача об определении коэффициента диффузии без использования этого предположения довольно сложна. В случае движения частиц, плотность которых $\rho_0$ во много раз превосходит плотность $\rho$ окружающей среды, определение коэффициента диффузии значительно упрощается.

При решении задачи примем следующие предположения.

*1.* Турбулентный поток, заполняющий все пространство, является однородным и стационарным.

*2.* Концентрация частиц в потоке настолько мала, что изменением статистических характеристик потока, обусловленным наличием твердых частиц, можно пренебречь.

*3.* Радиус $R$ сферических частиц настолько мал, что движение частицы относительно окружающей среды подчиняется закону Стокса.

*4.* Изменение скорости среды на расстояниях порядка $R$ пренебрежимо мало и можно говорить о скорости среды $v$ в точке, в которой находится частица.

В соответствии с этими предположениями движение частицы будем описывать уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}=kv(x,t),\qquad k=\frac{9\nu\rho}{2\rho_0R^2} \tag{1}$$

Здесь $\nu$ – кинематическая вязкость среды, $t$ – время и $x$ – координата частицы.

Дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями $x=x_0$, $dx/dt=u_0$ при $t=0$ удобно заменить интегральным уравнением

$$x=x_0+\frac{u_0}{k}[1-\exp(-kt)]+\int_0^t\{1-\exp[-k(t-\tau)]v(x,\tau)\}d\tau$$

Дифференцируя это уравнение по $t$, получим

$$u\equiv\frac{dx}{dt}=u_0\exp(-kt)+k\int_0^t\exp[-k(t-\tau)]v(x,\tau)d\tau \tag{2}$$

При $\rho\ll\rho_0$ и не слишком малых $R$ существует такое время $t_0$, что

$$kt_0\ll1,\qquad t_0\gg T \tag{3}$$

Здесь $T$ – эйлеров временной интегральный масштаб.

Условия (3) означают, что за время $t_0$ скорость частицы $u$ меняется мало, но претерпевает несколько статистически независимых изменений, обусловленных турбулентными пульсациями скорости $v$.

При выполнении условий (3) плотность вероятности $w(u,t)$ того, что частица в момент времени $t$ имеет скорость $u$, описывается уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(aw-\frac{\partial}{\partial u}Bw\right)$$

Коэффициенты $a$ и $B$ в этом уравнении определяются из уравнения (2)

$$a(u_0)=\langle(u-u_0)\rangle/t_0=-ku_0$$

Угловыми скобками обозначено осреднение по большому числу частиц

$$B(u_0)=\frac{\langle (u-u_0)^2\rangle}{2t_0}=$$

$$=\frac{k^2}{2t_0}\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^{t_0}\exp[-k(2t_0-\tau-\xi)]\langle v(x_0+u_0\tau,\tau)\,v(x_0+u_0\xi,\xi)\rangle d\tau\, d\xi$$

Для стационарной и однородной турбулентности корреляции скорости $\langle v(x_0+u_0\tau,\tau)\,v(x_0+u_0\xi,\xi)\rangle$ может зависеть только от $\tau-\xi$ и скорости $u_0$. Положив $\alpha=\tau-\xi$, $\beta=\tau+\xi$, получим

$$B(u_0)=\frac{k^2}{4t_0}\exp(-2kt_0)\left\{\int\limits_0^{t_0}d\beta\exp(k\beta)\int\limits_{-\beta}^{\beta}\langle v(0,0)\,v(u_0\alpha,\alpha)\rangle d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0}^{2t_0}d\beta\exp(k\beta)\int\limits_{\beta-2t_0}^{2t_0-\beta}\langle v(0,0)\,v(u_0\alpha,\alpha)\rangle d\alpha\right\}.$$

Из условий (3) следует, что $\exp(kt_0)$ мало отличается от единицы, а корреляция скорости $\langle v(0,\ 0)\,v(u_0\alpha,\ \alpha)\rangle$ заметно отлична от нуля только для $\alpha\ll t_0$. Следовательно, пределы интегрирования по $\alpha$ можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$. Отбрасывая малые величины порядка $t_0$, окончательно получим

$$B(u_0)=k^2J(u_0)$$

(4) $$J(u_0)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle v(0,0)\,v(u_0\alpha,\alpha)\rangle d\alpha$$

Таким образом, уравнение Фоккера – Планка имеет вид

(5) $$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\left(kuw+\frac{\partial}{\partial u}k^2J(u)\,w\right)$$

Стационарное распределение частиц по скоростям находится из (5) и имеет вид

(6) $$w(u)=\frac{C}{J(u)}\exp\left(-\frac{1}{k}\int\limits_0^{u}\frac{\xi\,d\xi}{J(\xi)}\right)$$

Здесь $C$ – нормировочная константа.

Вычислим теперь средний квадрат смещения частицы за время $t$. Имеем

(7) $$\langle x^2\rangle=\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{t}\langle u(\tau)\,u(\xi)\rangle d\tau\, d\xi$$

В силу того что турбулентный поток стационарен, $\langle u(\tau)\,u(\xi)\rangle$ зависит только от $\alpha=\tau-\xi$ и, следовательно, можно написать

(8) $$\langle u(\tau)\,u(\xi)\rangle=\langle u(0)\,u(\alpha)\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}du_1w(u_1)\,u_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}du\,uw(u,\alpha\,|\,u_1,0)$$

Через $w(u,\ t\,|\,u_1,\ 0)$ обозначена плотность вероятности того, что частица в момент времени $t$ имеет скорость $u$ при условии, что в момент времени $t=0$ скорость частицы была $u_1$. Ясно, что функция $w(u,\ t\,|\,u_1,\ 0)$ является решением уравнения (5) с начальным условием $w(u,\ 0\,|\,u_1,\ 0)=\delta(u-u_1)$, где $\delta(u-u_1)$ – дельта-функция аргумента $(u-u_1)$.

Введем обозначение

$$f(u_1,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}uw(u,\alpha\,|\,u_1,0)\,du$$

Умножим уравнение (5) на $u$ и проинтегрируем полученное равенство по $u$ от $-\infty$ до $+\infty$. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}=u\left(kuw+\frac{\partial}{\partial u}k^2J(u)w\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(kuw+\frac{\partial}{\partial u}k^2J(u)w\right)du=-kf$$

При интегрировании учитывается, что величина $w$ очень быстро убывает с ростом $|u|$. Из полученного соотношения следует, что

$$f(u_1,t)=u_1\exp(-kt),\qquad \langle u(0)u(\alpha)\rangle=\langle u^2\rangle\exp(-k\alpha) \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) и положив $\alpha=\tau-\xi$, $\beta=\tau+\xi$, получим

$$\langle x^2\rangle=\langle u^2\rangle\left\{\int_0^t d\beta\int_0^\beta \exp(-k\alpha)\,d\alpha+\int_t^{2t}d\beta\int_0^{2t-\beta}\exp(-k\alpha)\,d\alpha\right\}=$$
$$=\frac{2\langle u^2\rangle}{k^2}[\exp(-kt)+kt-1] \tag{10}$$

Как известно, для достаточно больших $t$ коэффициент диффузии

$$D=\frac{\langle x^2\rangle}{2t}=\frac{\langle u^2\rangle}{k}=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}du\frac{u^2}{J(u)}\exp\left(-\frac{1}{k}\int_0^u\frac{\xi\,d\xi}{J(\xi)}\right)\right]\times$$
$$\times\left[k\int_{-\infty}^{+\infty}du\frac{1}{J(u)}\exp\left(-\frac{1}{k}\int_0^u\frac{\xi\,d\xi}{J(\xi)}\right)\right]^{-1} \tag{11}$$

Таким образом, при указанных выше предположениях коэффициент диффузии $D$ определяется формулой (11). Все статистические характеристики турбулентного потока входят в (11) в виде функции $J(u)$, которая определена формулой (4). Следовательно, задание пространственно-временных корреляций скорости турбулентного потока полностью определяет коэффициент диффузии $D$.

Следует, однако, отметить, что применимость формулы (11) довольно ограничена. Уравнение (1) правильно описывает движение шарика только при движении с малыми числами Рейнольдса и, следовательно, при не слишком больших скоростях $v$ и достаточно малых $R$. С другой стороны, радиус $R$ не может быть как угодно малым, так как с убыванием $R$ коэффициент $k$ растет и может оказаться настолько большим, что первое из условий (3) не будет выполняться.

Поступила 4 I 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Хинце И. О.* Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
2. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.

---

УДК 532.546

# О МОДЕЛИРОВАНИИ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**А. В. КОРОЛЕВ, М. И. ШВИДЛЕР**

*(Москва)*

Фильтрация грунтовых вод традиционно изучается как течение лишь одного флюида — воды, движением газовой фазы — воздуха обычно пренебрегают. При этом либо допускается существование зоны с неполным, обусловленным капиллярными силами насыщением порового пространства грунта водой, либо предполагается, что такой зоны нет и область течения воды ограничена некоторой свободной поверхностью, давление на которой постоянно. Последняя схематизация носит название безнапорной фильтрации [1].