

УДК 532.528

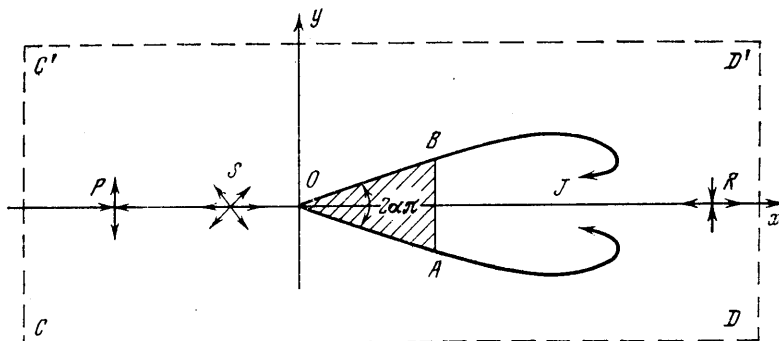
СИММЕТРИЧНОЕ КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КЛИНА ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКА НА КЛИНЕ ИЛИ В ПОТОКЕ

Н. Б. СОТИНА, В. В. ФОМИНЫХ

(Москва)

В работе решена задача о кавитационном симметричном обтекании клина плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости (по схеме Эфроса [1]) при наличии точечного источника в потоке или на клине. Получены выражения для сил, действующих на источник и клин со стороны жидкости, указаны условия, при которых реализуется отрицательное сопротивление (тяга), построены формы свободных линий тока для различных значений параметров течения.

1. Пусть плоский безграничный поток идеальной несжимаемой жидкости набегают из бесконечности на клин AOB с углом раствора 2α , образуя за ним каверну



Фиг. 1

с возвратной струей (фиг. 1). За исключением точки $S(x_s, 0)$, в которой находится источник мощности m , течение всюду потенциально. Для решения задачи двулиственную область течения $z = x + iy$ отобразим на верхний полукруг плоскости t (фиг. 2). В рассматриваемом случае комплексная скорость и производная от комплексного потенциала будут иметь вид

$$(1.1) \quad \zeta = \frac{dW}{v_0 dz} = e^{-i\alpha\pi} t^{2\alpha} \frac{(t^2 + p^2)(t^2 + r^2)(t^2 s^2 + 1)}{(t^2 p^2 + 1)(t^2 r^2 + 1)(t^2 + s^2)}$$

$$(1.2) \quad \frac{dW}{dt} = C \frac{t(t^2 + p^2)(t^2 p^2 + 1)(t^2 + r^2)(t^2 r^2 + 1)(t^2 - 1)}{(t^2 + a^2)^2(t^2 a^2 + 1)^2(t^2 + 1)(t^2 + s^2)(t^2 s^2 + 1)}$$

Здесь $t = ip$, $t = ir$ соответствуют критическим точкам области течения, $t = ia$ соответствует бесконечно удаленной точке потока, v_0 — скорость на границе каверны. Теперь функция $z(t)$ находится при помощи одной квадратуры

$$(1.3) \quad z(t) = \frac{1}{v_0} \int_0^t \zeta^{-1} \frac{dW}{dt} dt = e^{i\alpha\pi} \frac{C}{v_0} \int_0^t \frac{(t^2 p^2 + 1)^2 (t^2 r^2 + 1)^2 (t^2 - 1) dt}{t^{2\alpha-1} (t^2 + 1) (t^2 + a^2)^2 (t^2 a^2 + 1)^2 (t^2 s^2 + 1)^2}$$

Для определения параметров имеем следующие геометрические и кинематические условия:

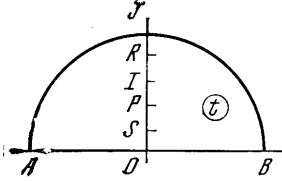
$$(1.4) \quad z(1) = 1/2 e^{i\alpha\pi}, \quad x_s = z(is)$$

$$(1.5) \quad (\sigma + 1)^{-1/2} = |\zeta(ia)|, \quad \sigma = \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 - 1$$

$$(1.6) \quad m = 2\pi \operatorname{Re} \left(\operatorname{res} \left[\frac{dW}{dt}; t = t_s \right] \right)$$

$$(1.7) \quad \operatorname{res} \left[\frac{dz}{dt}; t = ia \right] = 0$$

Здесь σ — число кавитаций, v_∞ — величина скорости потока, $l/2$ — длина щеки клина; x_s — координата точки, в которой расположен источник. Условие (1.7) следует из однозначности отображения области течения на полукруг.



Фиг. 2

2. Рассуждая аналогично [2], выведем формулу для определения суммарного коэффициента сопротивления клина и источника. Уравнение количества движения для жидкости, заключенной между параллельными стенками, сечениями CC' и DD' и бесконечно удаленным сечением струйки (фиг. 1), будет иметь вид

$$L(P_C - P_D) - X = \rho L(v_D^2 - v_C^2) - \rho v_0^2 \delta$$

Здесь L — ширина между стенками, P_C , P_D — давления жидкости в сечениях CC' , DD' соответственно, X — суммарная сила, действующая на клин и источник, δ — ширина струйки в бесконечности. Принимая во внимание соотношения

$$P_C - P_D = \frac{\rho}{2} (v_D^2 - v_C^2); \quad m + v_C L = v_0 \delta + v_D L$$

и устремляя L к бесконечности, получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} X &= \rho v_0 q + v_\infty (q - m) \rho \\ c_x &= \frac{X}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l} = 2 \frac{q - m}{lv_\infty} + \frac{2qv_0}{lv_\infty^2} \end{aligned}$$

Здесь $q = v_0 \delta$ — расход в струйке.

При $\sigma = 0$ c_x можно определять по формуле

$$(2.2) \quad c_x = \frac{2\pi}{l} \operatorname{res} \left[\frac{dz}{dt}; t = i \right]$$

Следует отметить, при выводе формулы (2.1) предполагалось, что поток вектора количества движения жидкости за единицу времени через поверхность Ω , охватывающую источник, равен нулю, и для силы, действующей на источник, справедлива формула

$$(2.3) \quad F_u = -\frac{i\rho}{2} \int_{\Omega} \frac{d\bar{W}}{dz} d\bar{W}$$

Однако данное предположение не обязательно. Хотя интеграл в (2.3) не зависит от формы контура Ω , интеграл от давлений, взятый по Ω , меняется при деформации контура. Обозначая последний через F , приведем для него формулу

$$F = -\frac{i\rho}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{d\bar{W}}{dz} \right)^2 dz + \rho \int_{\Omega} \frac{d\bar{W}}{dz} d\psi$$

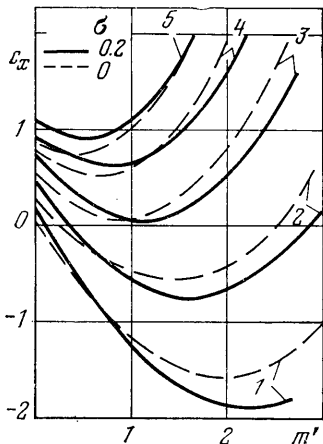
Здесь ψ — функция тока (направление обхода контуров выбрано по часовой стрелке), которую можно вывести также из известной формулы [4] для суммарной силы от давлений, действующих на внутренность замкнутого контура. Таким образом, имеется некоторый математический произвол, который может быть устранен соответствующим доопределением, исходящим из физических предпосылок задачи.

Например, если источником моделировать струйку с расходом m , вытекающую из носика клина навстречу потоку, то формулы (2.1) и (2.2) будут давать приближенные значения для результирующей силы, состоящей из давлений жидкости на клин и реактивной силы струи. Однако можно принять такую схему, при которой жидкость в источник подается из струйки, образующейся в конце каверны, и суммарный коэффициент сопротивления вычислять по формуле

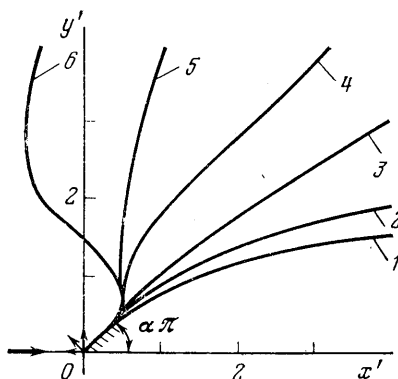
$$(2.4) \quad c_x = \frac{2(q - m)}{v_\infty l} \left(1 + \frac{v_0}{v_\infty} \right)$$

В этом случае поток количества движения жидкости за единицу времени в источнике равен не нулю, а $\rho m v_0$. Поскольку по этой схеме $q \geq m$, то $c_x \geq 0$. Сопротивление станет равным нулю, если вся жидкость из струйки будет попадать в источник.

Отметим, что суммарная сила, действующая на клин и источник, определяется по асимптотической форме свободных линий тока. Поэтому замена струйки источником дает хорошее приближение для силовых характеристик.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Пусть источник находится на клине, т. е. $s=0$. Если $\sigma \neq 0$, то условия (1.5) – (1.7) примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma+1}} = \frac{a^{2\alpha-2}(p^2-a^2)(p^2-r^2)}{(1-a^2p^2)(1-a^2r^2)}; \quad m = -C\pi \frac{p^2r^2}{a^4}$$

$$\frac{2r^2}{1-a^2r^2} = \frac{2}{1-a^2} - \frac{\alpha}{a^2} - \frac{2p^2}{1-a^2p^2}$$

Расход жидкости в струйке определим по формуле

$$q = -\pi \operatorname{res} \left[\frac{dW}{dt}; t=i \right] = -C\pi \frac{(p^2-1)^2(r^2-1)^2}{(a^2-1)^4}$$

Если $\sigma=0$ ($a=r=1$), то формулы (1.3), (1.4) и (2.2) примут вид

$$(3.1) \quad z = \frac{C e^{i\alpha\pi}}{v_\infty} \int_0^t t^{1-2\alpha} \frac{(t^2 p^2 + 1)^2 (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3} dt; \quad z(1) = e^{i\alpha\pi} \frac{l}{2}$$

$$m = -\pi C p^2; \quad c_x = -\frac{C\pi}{lv_\infty} [2p^2(2p^2-1) + \alpha(1-p^2)4p^2 + \alpha^2(1-p^2)^2]$$

На фиг. 3 изображено два семейства кривых (для различных углов α) при $\sigma=0$ и $\sigma=0.2$, характеризующих зависимость суммарного коэффициента сопротивления c_x , вычисляемого по формулам (2.2) и (2.1), от безразмерной мощности источника $m' = m/v_\infty l$, которая является ограниченной в рассматриваемой схеме течения. (Кривым 1–5 соответствуют α , равные 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5). При исследовании найденных выше соотношений получается, что при малых m' на клине имеется точка, в которой скорость меньше, чем скорость v_0 на границе каверны. По мере возрастания мощности источника эта точка перемещается к концу тела, при дальнейшем увеличении m' скорость на клине монотонно изменяется от ∞ до v_0 , а свободные линии тока приобретают точку перегиба; причем уже при конечных значениях m' критическая точка уходит в бесконечность. Из формулы (3.1) видно, что коэффициент сопротивления становится отрицательным (т. е. имеет место тяга) при выполнении условия

$$2p^2(2p^2-1) + \alpha(1-p^2)4p^2 + \alpha^2(1-p^2)^2 < 0 \quad (\sigma=0)$$

Имеется целая область значений m и α , где это неравенство справедливо.

На фиг. 4 построены свободные линии тока при $\sigma=0$, $\alpha=1/4$ (кривым 1–6 соответствуют значения m' , равные 0.018, 1.359, 2.186, 2.974, 4.402, 4.752 и значения c_x ,

равные 0,215, -0,133, 0,173, 0,748, 3,153, 4,059). Из графика видно, что, начиная с $m' \approx 2,4$, свободные линии тока имеют точку перегиба, которая при увеличении m' перемещается вперед по потоку. При $m' \approx 5$ критическая точка уходит в бесконечность.

4. Рассмотрим кавитационное обтекание пластинки при условии, что источник находится в потоке. В этом случае интеграл в (1.3) выражается в элементарных функциях ($\alpha = 1/2$)

$$z(t) = \frac{iC}{v_0} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} B_1 + B_2 \right) \operatorname{arctg}(ts) + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2a^2} B_3 + B_4 \right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} B_5 + B_6 \right) \operatorname{arctg}(ta) + B_7 \operatorname{arctg} t + B_3 \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \right. \\ \left. + B_5 \frac{t}{2(1+t^2a^2)} + B_1 \frac{t}{2(1+r^2s^2)} \right]$$

$$B_1 = \frac{(s^2 - p^2)^2 (s^2 - r^2)^2 (s^2 + 1)}{(a^2 s^2 - 1)^2 (s^2 - a^2)^2 (1 - s^2)}, \quad B_3 = \frac{(1 - a^2 p^2)^2 (1 - a^2 r^2)^2}{(a^4 - 1) (1 - a^2 s^2)^2 (a^2 - 1)^2}$$

$$B_2 = 2B_1 \left(\frac{p^2}{s^2 - p^2} + \frac{r^2}{s^2 - r^2} - \frac{s^2}{s^4 - 1} - \frac{1}{a^2 s^2 - 1} - \frac{a^2}{s^2 - a^2} \right)$$

$$B_4 = 2B_3 \left(\frac{p^2}{1 - a^2 p^2} + \frac{r^2}{1 - a^2 r^2} - \frac{1}{1 - a^2} - \frac{s^2}{1 - a^2 s^2} \right)$$

$$B_5 = \frac{(p^2 - a^2)^2 (a^2 - r^2)^2}{(a^2 - s^2)^2 (a^2 + 1) (1 - a^2)^3}, \quad B_7 = -\frac{2(1 - p^2)^2 (1 - r^2)^2}{(1 - a^2)^4 (1 - s^2)^2}$$

$$B_6 = 2B_5 \left(\frac{p^2}{a^2 - p^2} + \frac{r^2}{a^2 - r^2} + \frac{1}{1 - a^2} - \frac{s^2}{a^2 - s^2} \right)$$

Условие (1.7) примет вид

$$\frac{r^2}{1 - a^2 r^2} = \frac{s^2}{1 - a^2 s^2} - \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{1 - a^2} - \frac{p^2}{1 - a^2 p^2}$$

Для определения c_x в формуле (2.1) следует положить

$$m = -\pi C \frac{(p^2 - s^2) (1 - p^2 s^2) (r^2 - s^2) (1 - r^2 s^2)}{(a^2 - s^2)^2 (1 - s^2)^2 (1 - a^2 s^2)^2}; \quad q = \pi C \frac{B_7}{2}$$

Отметим, что при увеличении m' каверна удлиняется. Для наглядности на фиг. 5 построены свободные линии тока при $\sigma = 0,3$, когда источник находится на пластинке (кривые 1-4) и в потоке (кривая 5), причем кривым 1-5 соответствуют значения m' , равные 0,007, 0,864, 1,419, 2,557, 0,455 и значения c_x , равные 1,119, 1,198, 1,748, 4,512, 0,893.

При $\sigma = 0$ ($a = r = 1$) получим

$$z = -\frac{iC}{v_0} \int_0^t \frac{(1-t^2)(1+t^2 p^2)^2}{(1+t^2 s^2)^2 (1+t^2)^3} dt = \\ = -\frac{iC}{v_0} \left[\left(\frac{3}{8} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + A_3 \right) \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} A_1 + A_2 \right) \frac{t}{1+t^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} A_1 \frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{2} A_4 \frac{t}{(1+s^2 t^2)^2} + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} A_4 + A_5 \right) \operatorname{arctg}(ts) \right]$$

$$A_1 = \frac{2(1-p^2)^2}{(1-s^2)^2}, \quad A_2 = A_1 \left(\frac{2p^2}{1-p^2} - \frac{2s^2}{1-s^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = -A_2 \frac{2s^2}{1-s^2} + A_1 \left[\frac{p^2}{p^2-1} - \frac{s^4}{(1-s^2)^2} + \frac{p^4}{(1-p^2)^2} \right]$$

$$A_4 = \frac{(1+s^2)(s^2-p^2)^2}{(s^2-1)^3}, \quad A_5 = A_4 \left(\frac{2p^2}{s^2-p^2} - \frac{1}{1+s^2} - \frac{3}{s^2-1} \right)$$

Суммарную силу можно посчитать по формуле (2.2) или по формуле [3]

$$F_x = -\frac{1}{2} C \rho v_\infty \left(\frac{3}{8} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + A_3 \right)$$

$$c_x = \frac{\pi d}{l} - \frac{2m}{v_\infty l}, \quad d = -C \frac{(A_1 + A_2)^2}{2v_\infty A_1}$$

Здесь d — параметр предельной параболы $y^2 = 2dx$, который определяется из асимптотического закона расширения струй

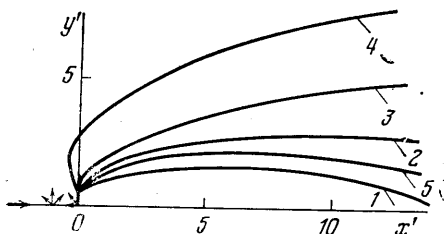
$$x + iy \sim -\frac{iC}{8v_\infty} \left[(A_1 + A_2) \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - iA_2 \frac{\cos^2 \theta}{8(1 - \sin \theta)^2} \right]; \quad t = e^{i\theta}$$

Для определения силы, действующей на источник, имеем

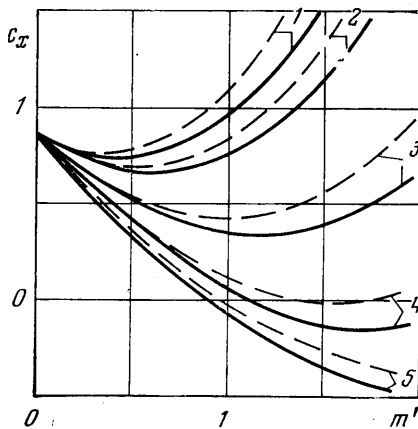
$$F_u = -\frac{i\rho}{2} \int \frac{d\bar{W}}{dz} dW = \rho v_\infty \pi \operatorname{res} \left[\zeta \frac{dW}{dt}; t = t_s \right] =$$

$$= \frac{\rho v_\infty \pi C (p^2 - s^2)^2 (1 + s^2)}{4(1 - s^2)^3} \left(\frac{1}{s} - \frac{4s}{p^2 - s^2} + \frac{4s(2 + s^2)}{1 - s^4} \right)$$

Суммарный коэффициент сопротивления, как видно из формул, зависит от многих параметров (m' , α , σ , x_s). На фиг. 6 сплошными линиями приводятся кривые зависимости суммарного коэффициента сопротивления от m' для различных



Фиг. 5



Фиг. 6

положений источника $x_s' = x_s/l$, а штриховыми линиями — коэффициент сопротивления пластинки для тех же x_s' при $\sigma = 0$ (на фиг. 6 кривым 1–4 соответствуют x_s' , равные 0.1, 0.3, 0.6, 0.9).

Случай, когда $\sigma = 0$ и источник находится на пластинке, был также рассмотрен в работе [4], в которой сила определялась как главное значение интегралов от давления. Полученная в результате кривая совпадает с кривой 5 на фиг. 3.

Авторы благодарят Л. И. Седова за внимание к работе.

Поступила 14 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М. — Л., Гостехиздат, 1950, гл. 5, § 4.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961, § 22.
3. Согина Н. Б. Асимптотический закон расширения каверны при наличии в потоке гидродинамических особенностей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
4. Штанько В. А. О струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток. Тр. НИИ прикл. мат. и мех. при Томск. ун-те, 1976, т. 7.