

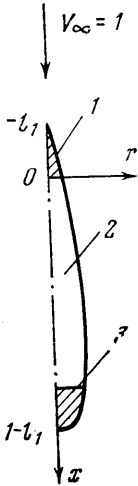
**К ВОПРОСУ О ФОРМЕ ТОНКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КАВЕРНЫ  
В ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ**

И. Г. НЕСТЕРУК

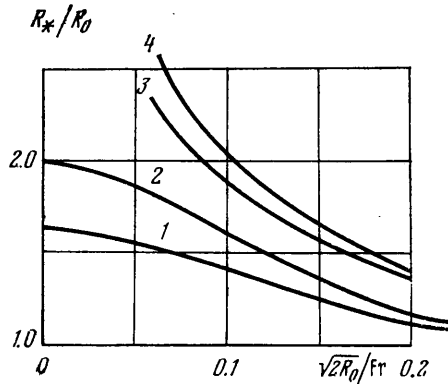
(Москва)

Получено решение уравнения для формы тонкой осесимметричной каверны в тяжелой жидкости. Произведены расчеты минимальных чисел кавитации.

В последнее время широко разрабатываются методы расчета осесимметричных каверн, основанные на теории тонкого тела, например [1-6]. Несмотря на прогресс в области численных решений интегро-дифференциального уравнения для контура тонкой осесимметричной каверны, например [2], представляет интерес получение



Фиг. 1



Фиг. 2

простых уравнений, пригодных для различного рода качественных оценок. Это и составляет предмет данной работы.

Предполагается, что имеет место осесимметричное установившееся безвихревое обтекание идеальной несжимаемой жидкостью системы тел 1-2-3 (см. фиг. 1). На каждом теле выполнено условие непротекания. Форма тела 1 считается заданной, на теле 2 и на части тела 3, примыкающей к телу 2, предполагается выполненным условие постоянства давления, а форма остальной части тела 3 может быть выбрана произвольно при условии сохранения гладкости. Если тело 2 представляет собой каверну, то рассматривается, по существу, схема Рябушинского с замыканием на тело специальной формы. Такая схема позволяет осуществить безотрывное замыкание.

Согласно [1], внутреннее разложение для потенциала течения имеет вид

$$(1) \quad \varphi(x, r^*, \varepsilon) = x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon A(x) + \varepsilon^2 \{A(x) \ln r^* + B(x)\} + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon)$$

$$r^* = r/\varepsilon; \quad A(x) = R(x)R'(x)/\varepsilon^2, \quad -l_1 \leq x \leq 1-l_1$$

$$B(x) = A(x) \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{1-l_1} A'(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр, отношение максимального радиуса системы тел к ее полной длине;  $R(x)$  — контур системы тел в плоскости меридиана;  $l_1$  — длина тела 1; скорости отнесены к скорости набегающего потока  $V_\infty$ ; длины — к длине системы  $L$ .

Интеграл Бернулли для точек на границе каверны дает

$$(2) \quad V^2 = 1 + \sigma \pm 2x/\operatorname{Fr}^2$$

Здесь  $\sigma$  — число кавитации на уровне точки схода струй;  $\text{Fr} = V_\infty / \sqrt{gL}$  — число Фруда;  $p_\infty$  — статическое давление далеко от тела при  $x=0$ ;  $p_k$  — давление в каверне; знак плюс в уравнении (2) соответствует направленному вдоль  $x$  вектору силы тяжести; знак минус — противоположному направлению силы тяжести.

Поскольку в осесимметричном случае

$$V^2 = (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial r)^2$$

уравнение (2) с использованием (1) дает

$$(3) \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon A'(x) + \varepsilon^2 \{A'(x) \ln(R(x)/\varepsilon) + B(x) + A^2(\varepsilon/R(x))^2/2\} + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = \sigma/2 \pm x/\text{Fr}^2$$

Таким образом записывается уравнение для формы тонкой осесимметричной каверны в тяжелой жидкости. Уравнение (3) отличается от известных выражений, например [2, 3], тем, что в нем выделен член порядка  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ . Если ограничиться только этим членом, то уравнение (3) запишется в виде

$$(4) \quad (RR')' \ln \varepsilon = \sigma/2 \pm x/\text{Fr}^2$$

Уравнение (4) справедливо, вообще говоря, только для очень тонких каверн, когда  $|\ln \varepsilon| \gg 1$ .

Интегрирование (4) с начальными условиями

$$R_2(0) = R_1(0) = R_0; \quad R_2'(0) = R_1'(0) = R_0'$$

даёт

$$(5) \quad R^2 = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{x^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_0 R_0' x + R_0^2$$

Уравнение, подобное (4), рассматривается в работе [6]. В обозначениях данной статьи уравнение работы [6] можно записать следующим образом:

$$(RR')' = -\sigma(x)/2\mu(\varepsilon)$$

Однако теоретические оценки функции  $\mu(\varepsilon)$  даны в [6] только в случае невесомой жидкости. Уравнение (5) с приведенными ниже системами уравнений для определения  $R_0$  и  $\varepsilon$  позволяют произвести расчет тонких осесимметричных каверн в тяжелой жидкости, не используя никаких эмпирических зависимостей.

Дифференциальные уравнения для формы тонких каверн получены в работах [4, 5]. В уравнении работы [4] кроме члена порядка  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$  учтена часть членов порядка  $\varepsilon^2$ , поэтому оно имеет такую же точность и область применимости, как и уравнение (5). Расчет каверн по уравнению работы [4] в случае невесомой жидкости даёт худшее совпадение с экспериментом, чем расчет по уравнению (5).

Уравнение работы [5] имеет примерно одинаковую с уравнением (5) область применимости и более высокую точность, так как в нем учтены все члены порядка  $\varepsilon^2$ , но отброшены члены порядка  $\varepsilon^2 \ln |\ln \varepsilon| / |\ln \varepsilon|$ . Однако уравнение работы [5] сложнее уравнения (5); в частности, оно не может быть проинтегрировано в квадратурах.

Для определенности предполагается, что формула (5) справедлива не только в части тела 3, примыкающей к каверне 2, а для всего тела 3. Если максимальный радиус системы соответствует точке каверны, то имеет место следующая система уравнений для определения  $R_0$  и  $\varepsilon$ :

$$(6) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma x_*^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{x_*^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_0 R_0' x_* + R_0^2}$$

$$x_* = \mp \frac{\sigma \text{Fr}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma \text{Fr}^2}{2}\right)^2 \mp 2R_0 R_0' \text{Fr}^2 \ln \varepsilon}$$

$$0 = \frac{\sigma(1-l_1)^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{(1-l_1)^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_0 R_0'(1-l_1) + R_0^2$$

$$l_1 = R_0(l_1/R_0)$$

где  $x_*$  — координата миделевого сечения каверны, полученная из условий  $R'(x_*)=0$ ,  $R''(x_*) < 0$ .

Если максимальный радиус системы достигается на кавитаторе 1, то величины  $R_0$  и  $\varepsilon$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\varepsilon = R_0(R_*/R_0)$$

$$(7) \quad 0 = \frac{\sigma(1-l_1)^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{(1-l_1)^3}{3 Fr^2 \ln \varepsilon} + 2R_0 R_0' (1-l_1) + R_0^2$$

$$l_1 = R_0 (l_1/R_0)$$

где  $R_*$  — радиус миделевого сечения тела 1.

В системах уравнений (6) и (7) величины  $R_*/R_0$ ,  $l_1/R_0$  известны из геометрии кавитатора 1.

Расчет по уравнению (5) с использованием системы уравнений (6) в случае, когда ускорение силы тяжести направлено вдоль оси  $x$ , показывает, что длина и радиус миделевого сечения каверны при фиксированных числах  $Fr$  увеличиваются с уменьшением числа кавитации и уменьшаются с уменьшением числа  $Fr$  при фиксированных числах кавитации. Такие же зависимости наблюдались экспериментально [7] и получены при численном решении интегро-дифференциального уравнения для формы каверны [2]. На фиг. 2 представлена зависимость радиуса миделевого сечения каверны от числа Фруда для конуса с углом при вершине  $10^\circ$ . Кривым 1–4 соответствуют числа кавитации 0.035, 0.02, –0.03, –0.04.

Количественное сравнение расчета по уравнению (5) с имеющимися экспериментальными данными [8], соответствующими  $\ln \varepsilon \sim 1$ , дает совпадение для радиуса миделевого сечения каверны 30–40%, а для длины — порядка 60–70%. К сожалению, отсутствие систематических экспериментов по очень тонким кавернам не позволило сравнить расчет и эксперимент в области, где уравнение (5) должно давать хорошее совпадение.

Таким образом, уравнение (5) может применяться для качественных оценок и прикидочных расчетов даже в случаях, когда  $\ln \varepsilon \sim 1$ .

Далее будет рассматриваться случай, когда ускорение силы тяжести направлено против оси  $x$ . Из правила знаков Декарта, примененного к многочлену

$$R^2 = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} - \frac{x^3}{3 Fr^2 \ln \varepsilon} + 2R_0 R_0' x + R_0^2$$

в случае, когда  $R_0' \geq 0$  (справедлива система (6)), следует, что  $R^2(x)$  может иметь положительные корни только при  $\sigma > 0$ . А при  $\sigma > 0$  и  $R_0' \geq 0$  многочлен имеет один отрицательный корень. Поэтому для существования положительных корней необходимо и достаточно существование трех действительных корней. Если считать, что течение возможно только в случае существования положительных корней многочлена  $R^2(x)$ , то должна выполняться следующая система неравенств:

$$(8) \quad f(\sigma) = \sigma^3 - \ln \varepsilon \left[ 2\sigma^2 (R_0')^2 - \frac{12\sigma R_0 R_0'}{Fr^2} - \frac{6R_0^2}{Fr^4} + \frac{64R_0 (R_0')^3 \ln \varepsilon}{3 Fr^2} \right] \geq 0$$

$$\sigma > 0$$

Можно показать, что многочлен  $f(\sigma)$  имеет только один положительный корень, который соответствует минимальному из возможных при данном числе  $Fr$  чисел кавитации  $\sigma_m$ .

В случае  $R_0' < 0$  многочлен  $R^2(x)$  имеет один отрицательный корень, а положительные корни существуют как при положительных, так и при отрицательных числах кавитации при условии

$$(9) \quad f(\sigma) = \sigma^3 - \ln \varepsilon \left[ 2\sigma^2 (R_0')^2 - \frac{12\sigma R_0 R_0'}{Fr^2} - \frac{6R_0^2}{Fr^4} + \frac{64R_0 (R_0')^3 \ln \varepsilon}{3 Fr^2} \right] \geq 0$$

Можно показать, что многочлен  $f(\sigma)$  имеет при  $R_0' < 0$  только один действительный корень, соответствующий  $\sigma_m$ .

На фиг. 3 представлены рассчитанные по системам неравенств (8), (9) с использованием систем (6), (7) соответственно области чисел  $\sigma$  и  $Fr$ , при которых возможно установившееся течение с вектором силы тяжести, направленным против скорости набегающего потока. Кривая 1 дает зависимость минимального числа кавитации от числа  $Fr$  для конуса с  $R_0' = 0.1$ ; кривая 2 — для случая  $R_0' = 0$ ,  $l_1/R_0 = 10$ ; кривая 3 — для  $R_0' = -0.1$ ,  $R_*/R_0 = 2$ ,  $l_1/R_0 = 10$ . Допустимые области чисел  $\sigma$  и  $Fr$  лежат выше соответствующих кривых. Малым числам  $Fr$  соответствуют менее тонкие каверны, поэтому вид зависимости  $\sigma_m$  в этой области нуждается в уточнении. При больших числах  $Fr$  и достаточно тонких кавитаторах системы неравенств (8), (9) дают точную зависимость  $\sigma_m$  от числа  $Fr$ .

Стремление числа кавитации к  $\sigma_m$  физически соответствует в случае искусственной кавитации неограниченному увеличению расхода воздуха, потребного для поддержания заданного течения.

При  $Fr \rightarrow \infty$  в случае  $R_0' \geq 0$  минимальное число кавитации стремится к нулю, что соответствует общепринятым представлениям. Из фиг. 3 видно, что в случае, когда  $R_0' < 0$  и жидкость невесома ( $Fr \rightarrow \infty$ ), возможны течения с отрицательными числами

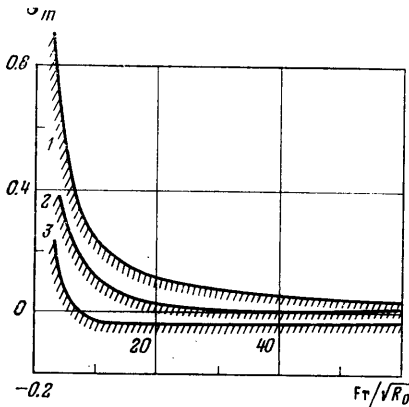
кавитации. В настоящее время известно много схем плоских кавитационных течений невесомой жидкости с отрицательными числами кавитации [9]. Уравнение (5) позволяет произвести расчет течений при отрицательных числах кавитации в осесимметричном случае.

Из (9) и (7) можно получить простую формулу для минимального числа кавитации в случае невесомой жидкости при  $R' < 0$

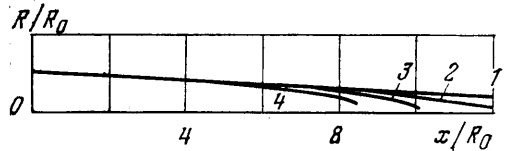
$$(10) \quad \sigma_m = 2(R_0')^2 \ln \varepsilon = 2(R_0')^2 [\ln(R_*/R_0) - \ln(l_1/R_0 - 1/R_0')]$$

Формула (10) применима, вообще говоря, когда  $|\ln \varepsilon| \gg 1$ , т. е. для малых значений  $R_*/R_0$  и  $R_0'$  и больших значений  $l_1/R_0$ .

Из уравнения (5) в случае, когда жидкость невесома и  $R_0' < 0$ , и условия (10) следует, что  $R'' \ll 0$ , причем случаю минимального числа кавитации соответствует  $R'' = 0$ . Таким образом, требование вогнутости каверны в невесомой жидкости при отрицательных числах кавитации [9] не является общеприменимым. Тонкие каверны за тонкими кавитаторами при отрицательных числах кавитации выпуклы. Ограниченная область применимости требования работы [9] объясняется тем, что оно справедливо только в случае направленного внутрь каверны градиента давления. Однако в рассматриваемом случае



Фиг. 3



Фиг. 4

градиент давления на каверне направлен внутрь жидкости, в чем легко убедиться, используя выражение для потенциала (1).

На фиг. 4 представлены результаты расчета по уравнению (5) с использованием системы (7) формы каверн в невесомой жидкости в случае  $R_0' = -0.05$ ,  $l_1/R_0 = 20$ ,  $R_*/R_0 = 2$ . Кривая 1 соответствует минимальному числу кавитации  $\sigma_m \approx -0.015$ . Кривые 2-4 представляют собой формы каверн при  $\sigma = -0.01$ ; 0; 0.01 соответственно.

Фигура 4 иллюстрирует тот факт, что в невесомой жидкости минимальному числу кавитации соответствует, в случае  $R_0' < 0$ , каверна конечной длины в отличие от случая  $R_0' \geq 0$ .

Таким образом, уравнение (5), несмотря на приближенность, позволяет сделать ряд качественных выводов об осесимметричных кавитационных течениях.

Автор благодарен Е. Н. Капанкину, В. П. Карликову, Ю. Л. Якимову за интересные и полезные обсуждения результатов работы.

Поступила 14 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
2. Chou Y. S. Axisymmetric cavity flows past slender bodies of revolution. J. Hydronautics, 1974, vol. 8, No. 1.
3. Тайц О. Г. Продольное обтекание тонкого тела вращения со свободной границей. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
4. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
5. Якимов Ю. Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации. ПММ, 1968, т. 32, № 3.
6. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн. В сб. Гидромеханика, вып. 32, Киев, «Наукова думка», 1975.
7. Гульнев С. И., Капанкин Е. Н. Об особенностях кавитационного обтекания тел вертикальным потоком жидкости. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2.
8. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М., «Мир», 1974.
9. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.