УДК 532.516.013.4:536.25

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СМЕШАННОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Н. И. ЛОБОВ

(Пермь)

В настоящее время хорошо изучена устойчивость конвективного течения жидкости в слое между вертикальными параллельными плоскостями $x=\pm h$, нагретыми до разных температур $T=\mp\Theta$ [1]. Течение состоит из двух встречных потоков и описывается нечетными распределениями скорости и температуры. При малых и умеренных значениях числа Прандтля Pr неустойчивость течения связана с образованием вихрей на границе встречных потоков; при больших Pr неустойчивость связана с нарастающими тепловыми волнами. Устойчивость смешанного конвективного течения рассматривалась в работах [2–5], где основное течение представляло собой суперпозицию либо конвективного течения с кубическим профилем скорости и течения Куэтта [2], либо поперечного просачивания жидкости через проницаемые границы слоя [3–5]. Движение границ и поперечное просачивание в общем оказывают стабилизирующее действие (и течение Куэтта, и поперечное просачивание жидкости сами по себе гидродинамически устойчивы). В настоящей работе рассматривается влияние на устойчивость конвективного течения продольной прокачки жидкости, задаваемой расходом Q, так что в пределе больших Q получается неустойчивое течение Пуазейля.

Конвективное течение описывается безразмерными уравнениями конвекции со следующими условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\Delta\mathbf{v}+\mathrm{Gr}\,T\boldsymbol{\gamma} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)T=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$x=\pm1,\quad \mathbf{v}=0,\quad T=\mp1,\quad \int_{-1}^{1} v_z\,dx=\mathrm{Re} \tag{2}$$

Все обозначения здесь обычные; ось z направлена вертикально вверх; единицы таковы: h – расстояние, ν/h – скорость, Θ – температура, $\rho\nu^2/h^2$ – давление, h^2/ν – время. В задаче присутствуют три безразмерных параметра: число Грасгофа $\mathrm{Gr}=g\beta\Theta h^3/\nu^2$, число Прандтля $\mathrm{Pr}=\nu/\chi$, число Рейнольдса $\mathrm{Re}=Q/\rho\nu$ – безразмерный расход.

Уравнения (1) с условиями (2) допускают стационарное решение, описывающее плоскопараллельное движение с распределением скорости и температуры

$$T_0=-x,\qquad v_0=\frac{\mathrm{Gr}}{6}(x^3-x)-\frac{3}{4}\mathrm{Re}(x^2-1) \tag{3}$$

Распределение скорости v_0 описывает суперпозицию конвективного течения с кубическим профилем и течения Пуазейля с параболическим профилем.

Для исследования устойчивости течения (3) рассмотрим поведение малых возмущений скорости, температуры, давления. Легко показать, что теорема Сквайра выполняется и можно ограничиться рассмотрением только плоских возмущений, для которых стандартным образом вводится функция тока. Для амплитуд нормальных возмущений температуры ϑ и функции тока φ с волновым числом k и декрементом λ имеем спектральную краевую задачу

$$-\lambda\Delta\varphi+v_0ik\Delta\varphi-v_0''ik\varphi=\Delta\Delta\varphi+\mathrm{Gr}\,\vartheta'$$

$$-\lambda\vartheta+v_0ik\vartheta-T_0'ik\varphi=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\vartheta$$

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-k^2,\qquad x=\pm1,\qquad \varphi=\varphi'=0,\qquad \vartheta=0 \tag{4}$$

Далее будет рассматриваться предельный случай малых чисел Прандтля (высокая теплопроводность жидкости). В этом случае тепловые возмущения рассасываются достаточно быстро и можно рассматривать устойчивость в изотермической постановке [6]. В этом предельном случае дело сводится к задаче Орра – Зоммерфельда

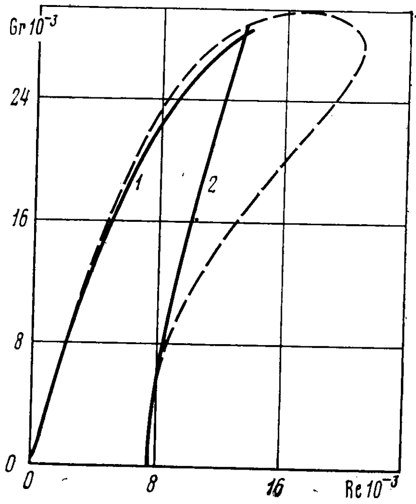
$$-\lambda\Delta\varphi+v_0 ik\Delta\varphi-v_0'' ik\varphi=\Delta\Delta\varphi \tag{5}$$

$$x=\pm 1, \qquad \varphi=\varphi'=0$$

с профилем скорости (3).

Задача (5) инвариантна по отношению к смене знака Gr и координаты x одновременно; одновременной смене знака Re, x и применению операции комплексного сопряжения. Поэтому достаточно рассмотреть решение краевой задачи лишь при Gr>0 и Re>0.

Задача (5) решалась численно сведением к двум задачам Коши. Получаемая при этом система четырех комплексных дифференциальных уравнений первого порядка интегрировалась методом Рунге – Кутта – Мерсона с использованием ортогонализации векторов решений по Граму – Шмидту. При фиксированном значении волнового числа k находились критические числа Gr и Re, которые затем минимизировались по волновому числу. Таким образом находились критические значения чисел Грасгофа и Рейнольдса, а также параметры критических возмущений. Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 1–3.



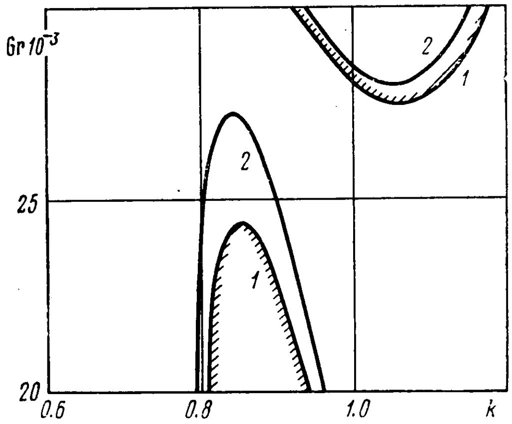
Фиг. 1

На фиг. 1 изображена карта устойчивости смешанного конвективного течения. Штриховой линией показано сечение нейтральной поверхности F(Gr, Re, k)=0 плоскостью k=1; область неустойчивости расположена со стороны больших Gr и Re. Сплошные кривые *1* и *2* изображают результат минимизации по волновому числу k. Область устойчивости комбинированного течения ограничена осями координат и пересекающимися кривыми *1* и *2*. Кривая *1* описывает влияние продольной прокачки на устойчивость конвективного течения. В отсутствие прокачки (Re=0) критическое число Грасгофа Gr=495.6 и достигается при k=1.35, что хорошо согласуется с результатами работы [7]. Слабая прокачка приводит к повышению устойчивости течения по закону Gr= =495.6+0.02Re². В целом конвективное течение стабилизируется весьма существенно; при Re=13 300 критическое число Грасгофа вырастает до 28 200, т. е. наблюдается почти 60-кратное повышение устойчивости.

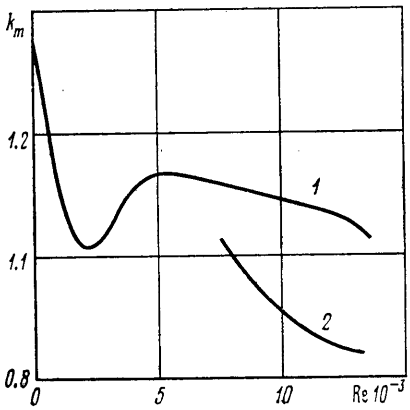
Кривая *2* описывает влияние конвекции на устойчивость плоского течения Пуазейля. В отсутствие конвекции (Gr=0) критическое число Рейнольдса Re=7696 при k=1.02, что совпадает с данными, приведенными в [8]. Представляется интересным тот результат, что добавление конвективного течения к течению Пуазейля повышает критическое число Рейнольдса. Таким образом, как видно из приведенных на фиг. 1 результатов, суперпозиция двух течений приводит к взаимной стабилизации.

На фиг. 2 представлены нейтральные кривые смешанного конвективного течения для двух значений числа Рейнольдса: Re=12 314 (кривые *1*) и 13 029 (кривые *2*); на плоскости число Грасгофа Gr – волновое число k. Области неустойчивости для кривых *1* отмечены штриховкой. Верхние кривые описывают поведение верхней границы области устойчивости смешанного конвективного течения, соответствующей кривой *1* на фиг. 1. Нижние нейтральные кривые описывают поведение нижней границы области устойчивости, соответствующей кривой *2* на фиг. 1. При Gr=0 течение неустойчиво к возмущениям с волновым числом из интервала $k_1<k<k_2$. С ростом числа Грасгофа интервал волновых чисел уменьшается. Таким образом, при фиксированном значении числа Рейнольдса смешанное конвективное течение устойчиво в интервале чисел Грасгофа $\mathrm{Gr}_{max}<\mathrm{Gr}<\mathrm{Gr}_{min}$, где Gr_{max} и Gr_{min} – экстремальные значения чисел Грасгофа для нижней и верхней нейтральных кривых соответственно. С увеличением прокачки этот интервал уменьшается до нуля; это происходит в точке пересечения кривых *1* и *2* на фиг. 1.

На фиг. 3 представлена зависимость волнового числа, при котором достигаются экстремумы нейтральных кривых, от числа Рейнольдса. Кривая *1* соответствует верхней границе области устойчивости течения, кривая *2* – нижней. При любых значениях числа Рейнольдса вплоть до точки пересечения границ устойчивости течения



Фиг. 2



Фиг. 3

(кривые *1* и *2* на фиг. 1) экстремумы нейтральных кривых достигаются при различных волновых числах.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за постановку задачи и руководство работой, Д. В. Любимову за ценное обсуждение.

Поступила 3 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Сер. МЖГ, 1978, т. 11.
2. *Бирих Р. В., Рудаков Р. Н.* О влиянии движения границ на устойчивость конвективного течения между вертикальными плоскостями. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1970, № 216.
3. *Шихов В. М.* Об устойчивости конвективного движения в вертикальном слое с проницаемыми границами. В сб. «Гидродинамика», вып. 7. Пермь, 1974.
4. *Шихов В. М.* Устойчивость конвективного движения в плоском вертикальном слое жидкости с проницаемыми границами. ПМТФ, 1976, № 1.
5. *Шихов В. М.* Спектры возмущений и устойчивость конвективного движения в вертикальном канале с проницаемыми границами. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1976, № 362.
6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
7. *Бирих Р. В.* О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
8. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1977.