

**ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ
ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ТРУБКУ С ЛОКАЛЬНЫМ РАСШИРЕНИЕМ**

С. Г. МИРОЛЮБОВ

(Москва)

В последние годы получили распространение работы, основанные на численном моделировании течения крови по крупным кровеносным сосудам, как вязкой ньютоновской жидкости. Среди наиболее частых патологических изменений сосудистого русла следует отметить локальные сужения и расширения просвета, связанные в первую очередь с атеросклеротическим поражением стенки сосуда. Такие сужения и расширения, называемые соответственно стенозами и аневризмами, могут оказывать существенное влияние на характер течения крови в их окрестности, обуславливать изменения в перепаде давления, а также способствовать процессам тромбообразования.

В [1] был приведен численный анализ пульсирующего потока крови, как ньютоновской жидкости, через осесимметричный сосуд со стенозом. Там же приведена краткая библиография работ, посвященных решению задач о течении вязкой жидкости в районе локального сужения области потока. Расчет осциллирующего течения в плоском канале с локальным расширением приведен в [2]. Экспериментальные исследования потока жидкости через стеклянные модели аневризм проводились в [3, 4].

В предлагаемой работе приводятся результаты численного решения задачи о пульсирующем течении крови, как ньютоновской жидкости, через жесткое осесимметричное расширение сосуда (аневризму) с произвольной непрерывно дифференцируемой однозначной зависимостью радиуса стенки R_w от продольной координаты Z .

1. Движение крови в крупных сосудах хорошо описывается уравнениями Навье — Стокса с условиями непротекания и прилипания жидкости на стенке. В случае осесимметричной конфигурации сосудистой стенки, а также осевой симметрии граничных условий на входе и выходе из рассматриваемой области задачу удобно решать в цилиндрических координатах в безразмерных переменных функции тока ψ и вихря ω .

Как было показано в [1], численное решение определяющих уравнений целесообразно проводить в системе координат, преобразованной и обезразмеренной следующим образом:

$$\eta = r/r_w(z), \quad \xi = z, \quad \zeta = \theta, \quad \tau = t$$

$$r = R/R_0, \quad z = Z/R_0, \quad t = TU_0/R_0, \quad r_w = R_w/R_0$$

где Z и R — размерные осевая и радиальная координаты, T — время, R_0 и U_0 — характерные значения длины и скорости.

Это позволяет сводить области с произвольными криволинейными границами к прямоугольнику, что крайне выгодно при использовании алгоритмов решения, основанных на конечно-разностных методах.

Уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями в новой системе координат имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\eta r_w'}{r_w} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{(\eta r_w')^2 + 1}{r_w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{2\eta^2 (r_w')^2 - \eta^2 r_w r_w'' - 1}{\eta r_w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \eta r_w \omega$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r_w \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\omega}{r_w} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\omega}{r_w} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\omega}{r_w \eta} \right] =$$

$$= \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\eta r_w'}{r_w} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{(\eta r_w')^2 + 1}{r_w^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(\eta r_w')^2 + 1 - \eta^2 r_w r_w'}{\eta r_w^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{\eta^2 r_w^2} \right]$$

$$(1.3) \quad \omega = \omega_0(\eta, \xi) \quad (\tau = 0), \quad \psi = \omega = 0 \quad (\eta = 0)$$

$$(1.4) \quad \psi = \psi_1(\eta, \tau), \quad \omega = \omega_1(\eta, \tau) \quad (\xi=0)$$

$$(1.5) \quad \psi = \psi_1(1, \tau), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \omega = \frac{(r_w')^2 + 1}{r_w^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (\eta=1)$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi=l)$$

$$\psi = \frac{\Psi}{U_0 R_0^2}, \quad \omega = \frac{\Omega R_0}{U_0}, \quad \text{Re} = \frac{2R_0 U_0}{\nu}, \quad l = \frac{L}{R_0}$$

$$RV = -\frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad RU = \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\partial V}{\partial Z}$$

$$u = \frac{U}{U_0}, \quad v = \frac{V}{U_0}, \quad p = \frac{P}{\rho U_0^2}$$

Здесь ρ — плотность, ν — вязкость, U и V — осевая и радиальная компоненты скорости, P — давление, L — длина исследуемой области, ω_0 , ψ_1 , ω_1 — заданные функции. Штрих означает дифференцирование по ξ .

Граничные условия (1.5) соответствуют условиям непротекания и прилипания жидкости на стенке, (1.3) — условию симметрии на оси. Распределение завихренности и функции тока по радиусу на входе в сосуд считается заданным определенной периодической по времени функцией в соответствии с (1.4). Условие (1.6) в случае достаточно длинного участка постоянного радиуса за область расширения сосуда соответствует непрерывному бесконечному продолжению трубки с постоянным радиусом. Начальным условием (1.3) задается поле завихренности в нулевой момент времени.

Для решения уравнений (1.1), (1.2) с начальными и граничными условиями (1.3)–(1.6) использовался алгоритм, основанный на конечно-разностных методах и примененный ранее в [1]. Это позволяло находить решение с точностью порядка $O(H^2)$ и $O(\Delta T^2)$, где H и ΔT — величины шагов равномерной пространственной и временной сетки. Выбранная схема оказывалась устойчивой при использовании в качестве входного профиля скорости прямоугольника $u(r, t) = u_0(t)$, $v=0$ во всех точках сечения, кроме точки, лежащей на стенке, где $u=0$, $v=0$.

Полученные в процессе решения поля вихря и функции тока использовались для нахождения распределений давления p , компонент скорости u и v и составляющих тензора напряжений, как описано в [1].

2. В качестве примера приведем некоторые результаты для следующих входных данных:

$$r_w(z) = 1 + (A/z_0^6) [z_0^2 - (z - z_1)^2]^3 \quad (|z - z_1| \leq z_0)$$

$$r_w(z) = 1 \quad (|z - z_1| > z_0), \quad z_0 = 1.5, \quad z_1 = 7$$

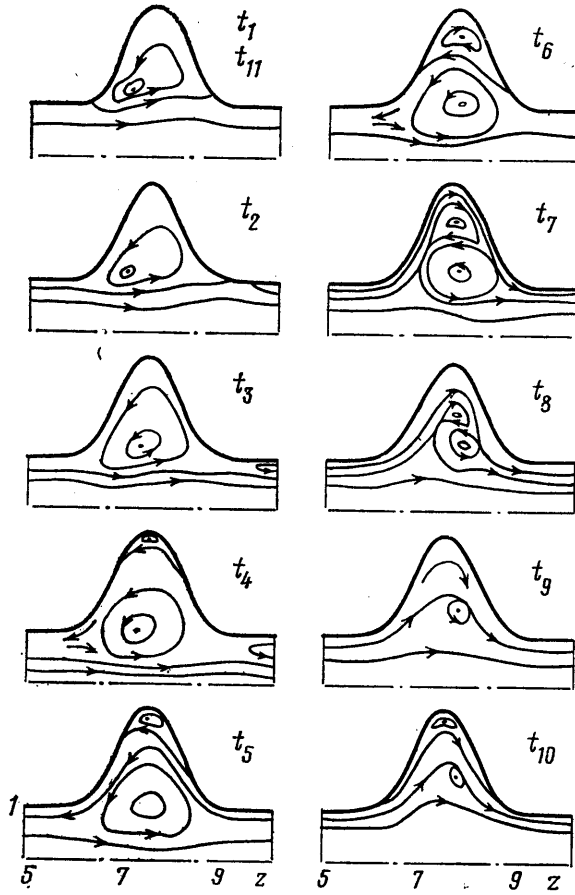
$$u_0(t) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi t/t_0)$$

$$t_0 = 4.5, \quad l = 20, \quad H = 0.1, \quad \Delta T = 0.01$$

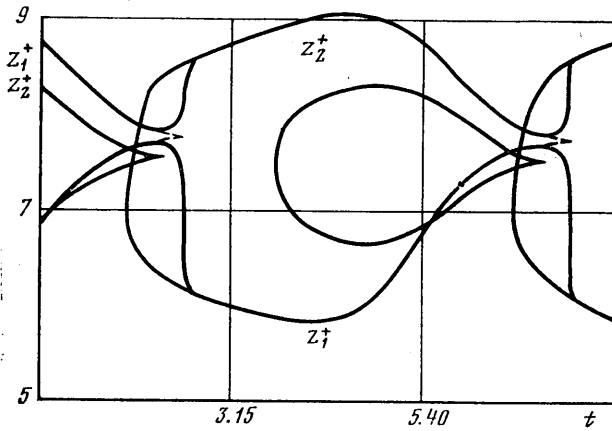
Для иллюстрации основных особенностей пульсирующего течения жидкости в районе расширения артерии был рассмотрен ряд случаев, характеризуемый различными числами Рейнольдса и поперечными размерами аневризмы: 1 — $\text{Re}=100$, $A=4$; 2 — $\text{Re}=100$, $A=2$, 3 — $\text{Re}=100$, $A=4$; 4 — $\text{Re}=200$, $A=2$. Причем за характерные значения длины и скорости принимаются радиус просвета сосуда в области, предшествующей расширению, и максимальная средняя по сечению скорость соответственно.

Для случая 4 на фиг. 1 приведены картины линий тока для десяти последовательных моментов времени t_1 – t_{11} , расположенных через равные промежутки длительностью 0.45, причем $t_1=2.7$. Отрывная зона, существующая в области расширения сосуда в момент t_1 , в отличие от квазистационарного случая растет с течением времени, несмотря на уменьшение расхода. Далее поток открывается по всей длине сосуда, причем этот процесс проявляет некоторое запаздывание за аневризмой (моменты t_2, t_3).

Дальнейшее мгновенное уменьшение расхода приводит к образованию вторичного отрыва в районе расширения (момент t_4), и к моменту t_5 , когда расход через сосуд равен нулю, имеет место наличие двух развитых отрывных зон, расположенных одна в другой. Вторичная зона растет (момент t_6), распространяется на область постоянного радиуса, и скорость вблизи стенки становится положительной по всей длине сосуда. В дальнейшем это приводит к образованию двух висячих вихрей (мо-



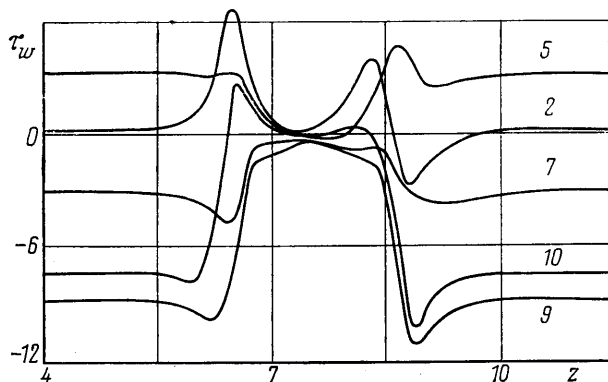
Фиг. 1



Фиг. 2

мент t_7), размеры которых уменьшаются при увеличении расхода (моменты t_8, t_9). Впоследствии вблизи стенки аневризмы поток вновь отрывается (момент t_{10}), и к моменту $t_{11}=t_1$ эта отрывная зона сливается с остатками висячего двойного вихря.

На фиг. 2 показано, как для случая 4 изменяются со временем продольные размеры зон, границы которых являются предельные замкнутые не на бесконечности линии тока (лежащие вне таких областей точки принадлежат линиям тока, уходящим в бесконечность); z_1^+ и z_2^+ означают координаты соответственно ближних и дальних по потоку краев таких зон. Обращает на себя внимание тот факт, что одна из описанных таким образом зон возникает и исчезает, в то время как другая суще-



Фиг. 3

ствует на протяжении всего периода колебаний, что обеспечивается слиянием остатков старой зоны с вновь возникшей в момент $t \approx 2.55 + 4.5n$, где n — целое число.

В случаях 1 и 2, т. е. для меньших чисел Рейнольдса и размеров аневризмы, такого слияния не происходит и, более того, существует определенный промежуток времени между моментом полной диссипации старого двойного висячего вихря (как показано пунктиром) и моментом зарождения новой отрывной зоны; в течение этого промежутка во всей области потока отсутствуют вихревые зоны. Однако для случая 3, характеризуемого меньшим числом Рейнольдса, но большим размером области расширения, наблюдается тот же эффект сохранения отрывной зоны на протяжении всего периода колебаний расхода, что и для случая 4.

На фиг. 3 для случая 4 представлено распределение напряжения трения на стенке τ_w , которое считается отрицательным при положительном значении пристенной скорости, в зависимости от продольной координаты z для моментов времени $t_2, t_5, t_7, t_9, t_{10}$ (обозначения на фиг. 3 соответствуют номерам индексов моментов t_i). На невозмущенный поток в прямой трубке накладывается возмущение, создаваемое расширением, причем в области аневризмы характерно наличие ряда локальных максимумов и минимумов. В месте наибольшего расширения сосуда значение сдвигового напряжения на стенке мало по сравнению с его величиной в районе невозмущенного пульсирующего течения.

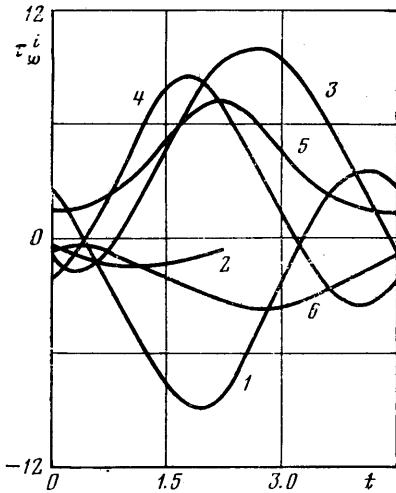
Фигура 4 иллюстрирует характер временного изменения величин τ_w^i , т. е. невозмущенного напряжения трения τ_w^1 и значений локальных экстремумов возмущения $\tau_w^2 - \tau_w^6$ (кривые 1-6 соответственно). На кривой 10 (фиг. 3) наглядно представлены указанные локальные экстремумы, причем нумерация ведется в направлении потока. Абсолютные значения экстремумов безразмерного трения τ_w являются суммой невозмущенного трения τ_w^1 и соответствующих относительных экстремумов.

Максимальное абсолютное значение трения приходится на экстремум τ_w^6 и реализуется в момент, близкий к t_9 . Кривые 1 и 4 (фиг. 4) находятся в противофазе, что обеспечивает близкое к нулю напряжение трения на стенке в районе максимального расширения сосуда. Отсутствие локального минимума τ_w^2 в течение полупериода колебаний расхода не позволяет продолжить кривую 2 на этот промежуток времени.

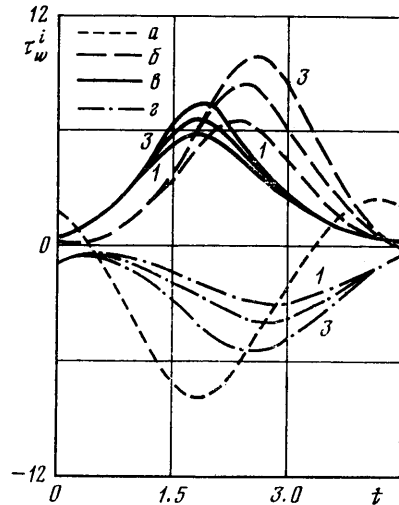
На фиг. 5 для числа Рейнольдса $Re=100$ показаны колебания невозмущенного трения τ_w^1 и локальных экстремумов $\tau_w^3, \tau_w^5, \tau_w^6$ (серии кривых $a - z$ соответственно) для величин A , равных 1, 2, 4 (кривые 1-3 соответственно). Очевидно возрастание значений экстремумов, как относительных, так и абсолютных, с ростом степени

расширения просвета, причем оно носит асимптотический характер, что понятно из соображений о конечности силовых воздействий на стенку со стороны потока даже при бесконечном значении A .

В таблице проведено сравнение максимальных значений модулей невозмущенного трения τ_w^- и модулей экстремумов возмущения τ_w^+ для квазистационарного и нестационарного подхода. Как те, так и другие значительно выше в нестационарном



Фиг. 4



Фиг. 5

случае, причем различие увеличивается с ростом числа Рейнольдса и размера аневризмы.

В заключение следует сказать, что установленное качественное различие в картинах течения крови для различных чисел Рейнольдса и размеров аневризм, незначительность напряжения трения в месте максимального расширения сосуда на про-

| № п.п. | Re | A | z ₀ | t ₀ | Квазистационарные | | Нестационарные | |
|--------|-----|---|----------------|----------------|-------------------|------------|----------------|------------|
| | | | | | τ_w^- | τ_w^+ | τ_w^- | τ_w^+ |
| 1 | 100 | 1 | 1.5 | 4.5 | 4.000 | 6.300 | 7.391 | 9.143 |
| 2 | 200 | 2 | 1.5 | 4.5 | 4.000 | 6.680 | 8.748 | 11.147 |

тяжении всего периода пульсаций и в широком спектре параметров, а также наличие абсолютного пика напряжений в районе лежащей ниже по потоку стенки локального расширения могут оказывать влияние на процессы тромбообразования в области аневризмы и на тенденции ее роста и проробдения.

Поступила 19 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Миролюбов С. Г. О пульсирующем течении вязкой жидкости через осесимметричную трубку с локальным сужением. Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 4.
2. Cheng L. Le-Chung, Clark M. E., Robertson J. M. Plane periodic flow predictions for fusiform aneurysms. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1978, vol. 104, No. 1.
3. Scherer P. W. Flow in axisymmetrical glass model aneurysms. J. Biomech., 1973, vol. 6, No. 6.
4. Stehbens W. E. Flow disturbances in glass models of aneurysms at low Reynolds numbers. Quart. J. Exp. Physiol., 1974, vol. 59, No. 2.