

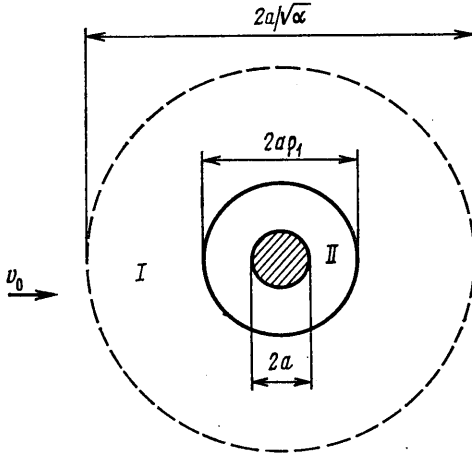
## СОПРОТИВЛЕНИЕ ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. Б. СТЕЧКИНА

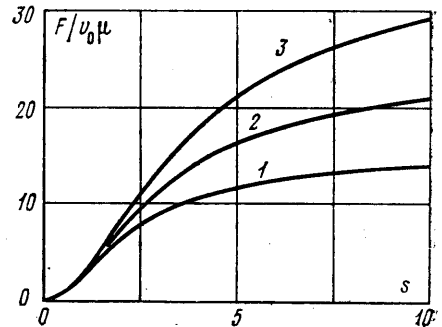
(Москва)

Задача об обтекании пористого проницаемого цилиндра при малых числах Рейнольдса представляет интерес для решения ряда задач химической технологии, например расчета пористых электродов, пористых катализаторов, нестационарной фильтрации аэрозолей волокнистыми фильтрами.

В работе решается задача о поперечном обтекании вязкой жидкостью сплошного цилиндра в пористой оболочке, и в частности пористого цилиндра в условиях степенного обтекания (система цилиндров) и изолированного цилиндра при произволь-



Фиг. 1



Фиг. 2

ных величинах проницаемости. Аналогичная задача о стоксовом обтекании проницаемых шаров была решена в ряде работ [1-3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью системы цилиндров с пористыми оболочками, расположенных перпендикулярно потоку, при малых числах Рейнольдса. Для описания такой системы используем ячеистую гидродинамическую модель [4]: будем рассматривать плоское движение жидкости, обтекающей цилиндр, только в области, ограниченной окружностью радиуса  $\rho_2^* = a\alpha^{-1/2}$ , где  $a$  — радиус цилиндра,  $\alpha$  — доля объема (площади), занятая твердыми цилиндрами (фиг. 1). Цилиндр окружен пористой проницаемой цилиндрической оболочкой радиуса  $\rho_1^* = a\rho_1$ . Звездочкой помечаются размерные величины.

В области вне пористого цилиндра (область I) движение жидкости описывается уравнениями гидродинамики в стоксовском приближении, а в области пористой оболочки (область II) — обобщенным уравнением Дарси [2, 5]

$$(1.1) \quad \text{grad } p_1 = \Delta v_1, \quad \text{div } v_1 = 0$$

$$(1.2) \quad \text{grad } p_2 = \Delta v_2 - s^2 v_2, \quad \text{div } v_2 = 0$$

$$(1.3) \quad v_{2\rho} = 0, \quad v_{2\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = 1$$

$$(1.4) \quad v_{1\rho} = v_{2\rho}, \quad v_{1\theta} = v_{2\theta}, \quad \tau_{1\theta} = \tau_{2\theta}, \quad p_1 = p_2 \quad \text{при } \rho = \rho_1$$

Здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*/v_0$  — безразмерная скорость потока,  $v_0$  — скорость потока на бесконечности,  $p = p^*a/\mu v_0$  — безразмерное давление,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\theta, \rho = r^*/a$  — безразмерные полярные координаты,  $s^2 = a^2/\kappa$ ,  $\kappa$  — проницаемость пористой оболочки,  $\tau_{\rho\theta}$  — тангенциальные составляющие тензора вязких напряжений. Индексы 1, 2 относятся к величинам в областях I, II соответственно.

2. Решение в области I. Вне пористого цилиндра, где справедливы уравнения (1.1), функция тока  $\Psi_1$  удовлетворяет уравнению и граничным условиям при  $\rho = \alpha^{-1/2}$

$$(2.1) \quad \Delta \Delta \Psi_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \cos \theta$$

В качестве условий на границе ячейки выбраны условия Кувабары [8]. Общее решение уравнения (2.1) с учетом граничных условий записывается в виде

$$(2.2) \quad \Psi_1(\rho, \theta) = \Phi_1(\rho) \sin \theta = \left\{ \frac{A_1}{\rho} + B_1 \rho + C_1 \rho \ln \rho + D_1 \rho^3 \right\} \sin \theta$$

$$B_1 = 1 - A_1 \alpha + \frac{C_1}{2} \ln \alpha + \frac{C_1}{4}, \quad D_1 = -\frac{C_1 \alpha}{4}$$

$$p_1 = -2C_1 \left( \alpha \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta$$

3. Решение в области II. В области пористой оболочки функция тока  $\Psi_2$  удовлетворяет уравнению

$$(3.1) \quad \Delta \Delta \Psi_2 - s^2 \Delta \Psi_2 = 0$$

Решая уравнение (3.1) методом разделения переменных ( $\Psi_2(\rho, \theta) = \Phi_2(\rho) \sin \theta$ ) и используя граничные условия (1.3), получим

$$(3.2) \quad \Phi_2(\rho) = -\frac{A_2 I_1(s\rho)}{s^2} - \frac{B_2 K_1(s\rho)}{s^2} + \frac{C_2 \rho}{2} + \frac{D_2}{\rho}$$

$$B_2 = -\frac{A_2 I_0(s)}{K_0(s)} + \frac{C_2 s}{K_0(s)}$$

$$D_2 = \frac{A_2}{s^2 K_0(s)} \{I_1(s) K_0(s) - I_0(s) K_1(s)\} + C_2 \left\{ \frac{K_1(s)}{s K_0(s)} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$p_2 = -s^2 \left\{ \frac{C_2 \rho}{2} - \frac{D_2}{\rho} \right\} \cos \theta$$

Здесь  $I_0(s), I_1(s), K_0(s), K_1(s)$  – модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента. Коэффициенты  $A_1, C_1, A_2, C_2$  находятся из условий сшивки решений на границе областей I и II (1.4). Формулы для определения этих коэффициентов не записываются ввиду их громоздкости, но их значения можно найти для каждого конкретного значения параметров  $s$  и  $\alpha$ . Сила, действующая на единицу длины цилиндра с пористой оболочкой, определяется величиной коэффициента  $C_1$

$$(3.3) \quad F = 4\pi \mu \nu_0 C_1$$

4. Пористый цилиндр. Рассмотрим более простой случай, когда цилиндры целиком пористые ( $a=0$ ) с плотностью упаковки  $\beta = \rho_1^2 / \rho_2^2$ . В качестве характерного размера выберем теперь  $\rho_1$ , и все линейные размеры отнесем к этому радиусу. Функция тока в области II будет иметь вид

$$(4.1) \quad \Psi_2(\rho, \theta) = \left\{ \frac{C_2 \rho}{2} - \frac{A_2 I_1(s\rho)}{s^2} \right\} \sin \theta$$

Коэффициенты  $B_2$  и  $D_2$  равны нулю, так как функция  $\Phi_2(\rho)$  должна быть ограничена в нуле. Функция  $\Phi_1(\rho)$  определяется, как и ранее, формулой (2.2). Из условий сшивки решений на поверхности пористого цилиндра (1.4) определяются все неизвестные коэффициенты

$$(4.2) \quad A_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\beta}{2} - \frac{2(1-\beta)}{s^2} \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right\} C_1$$

$$A_2 = -\frac{2(1-\beta)}{I_1(s)} C_1, \quad C_2 = \frac{4(1+\beta)}{s^2} C_1$$

$$C_1 = \left\{ -\frac{1}{2} \ln \beta - \frac{3}{4} + \beta - \frac{\beta^2}{4} + \frac{(1-\beta)^2 I_2(s)}{s I_1(s)} + \frac{4}{s^2} \right\}^{-1}$$

Параметр  $s$  обратно пропорционален проницаемости пористого цилиндра, и для его конкретизации нужно задать модель структуры пористого цилиндра.

Сила, действующая на единицу длины пористого цилиндра, равна

$$(4.3) \quad \frac{F}{\mu\nu_0} = 4\pi \left\{ -\frac{1}{2} \ln \beta - \frac{3}{4} + \beta - \frac{\beta^2}{4} + \frac{(1-\beta)^2 I_2(s)}{s I_1(s)} + \frac{4}{s^2} \right\}^{-1}$$

При  $s \rightarrow \infty$  эта формула переходит в формулу Кувабары для непроницаемого цилиндра [6]. На фиг. 2 приведены зависимости  $F/\mu\nu_0$  от  $s$  для  $\beta=0.05, 0.1, 0.15$  — кривые 1, 2, 3 соответственно.

5. **Изолированный цилиндр.** Аналогично можно решить задачу для изолированного пористого цилиндра. В этом случае в области I функция тока вблизи цилиндра принимает вид

$$(5.1) \quad \Psi_1(\rho, \theta) = \{-a_0 \rho \ln \rho + a_1 \rho + a_2 \rho^{-1}\} \sin \theta$$

Компоненты скорости вдали от цилиндра

$$(5.2) \quad \begin{aligned} v_\rho &= \cos \theta + c \left\{ \frac{4}{\rho \operatorname{Re}} - \exp \left( \frac{\operatorname{Re}}{4} \rho \cos \theta \right) \times \right. \\ &\times \left. \left[ K_0 \left( \frac{\operatorname{Re}}{4} \rho \right) \cos \theta + K_1 \left( \frac{\operatorname{Re}}{4} \rho \right) \right] \right\} \\ v_\theta &= \left\{ -1 + c \exp \left( \frac{\operatorname{Re}}{4} \rho \cos \theta \right) K_0 \left( \frac{\operatorname{Re}}{4} \rho \right) \right\} \sin \theta, \quad \operatorname{Re} = \frac{2a\nu_0}{\nu} \end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Из условий сшивки полей течения вблизи и вдали от цилиндра, выражения для функции тока в области II (4.1) и из условий (1.4) получим

$$(5.3) \quad \begin{aligned} c &= a_0, \quad a_1 = 1 + a_0 + a_0 \ln \frac{8}{\gamma \operatorname{Re}} \\ 1 + a_0 + a_0 \ln \frac{8}{\gamma \operatorname{Re}} + a_2 &= \frac{C_2}{2} + \frac{A_2 I_1(s)}{s^2} \\ a_0 + 2a_2 &= \frac{A_2 I_2(s)}{s}, \quad 4a_2 = -\frac{A_2}{2} \{I_1(s) + I_3(s)\}, \quad 2a_0 = -\frac{s^2 C_2}{2} \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma = 0.5772$  — константа Эйлера.

Решив эту систему относительно  $a_0$ , получим силу сопротивления

$$(5.4) \quad \frac{F}{\mu\nu_0} = 4\pi \left\{ \frac{1}{2} + \ln \frac{8}{\gamma \operatorname{Re}} + \frac{I_2(s)}{s I_1(s)} + \frac{4}{s^2} \right\}^{-1}$$

Это выражение при  $s \rightarrow \infty$  переходит в известное выражение для сопротивления цилиндра вязкому потоку [7]. Заметим, что полученный результат (5.4) отличается от результата работы [2], где выражение для  $F$  получено для цилиндра с малой проницаемостью ( $s \gg 1$ ), на численные множители, что связано с ошибками в постановке граничных условий в [2].

Поступила 8 VIII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yamamoto K. Flow of viscous fluid at small Reynolds numbers past a porous sphere. J. Phys. Soc. Japan, 1971, vol. 31, No. 5.
2. Yamamoto K. Flow of viscous fluid at small Reynolds numbers past a porous body. J. Phys. Soc. Japan, 1973, vol. 34, No. 3.
3. Neale G., Epstein N., Nader W. Creeping flow relative to permeable spheres. Chem. Engng Sci., 1973, vol. 28, No. 10.
4. Халпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
5. Saffman P. G. On the boundary condition at the surface of a porous medium. Studies in Appl. Math., 1971, vol. 50, No. 2.
6. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in viscous flow at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14, No. 4.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.