числе Прандтля) устойчивость конвективного профиля, подробно исследована теоретически [6]. Используя результаты этого исследования и считая профили скоростей при прокачке жидкости в фазе $Q=0$ замороженными, можно найти зависимость $\mathrm{Re}^*(\sigma)$ для низких частот. Вычисления сводятся к определению Q_0 (и, следовательно, Re), для которых при данном σ в момент $Q=0$ возникает критический профиль, идентичный конвективному. Таким способом получена для $\sigma<5$ кривая устойчивости *4* на фиг. 2. С уменьшением σ устойчивость резко повышается, что подтверждается экспериментом (точки *4–6*), и вызвано уменьшением интенсивности встречных потоков.

Случай $\sigma=0$ отвечает стационарному пуазейлевскому течению жидкости в канале. Устойчивость плоского течения Пуазейля нарушается при $\mathrm{Re}\approx3500$ (точка *a* на фиг. 2) возмущениями в виде волн Толмина – Шлихтинга [7]. Можно полагать, что в интервале $0<\sigma<1$ определяющей также является неустойчивость Толмина – Шлихтинга, причем наиболее опасными будут близкие к параболическому профили скорости в фазе максимального расхода $Q=Q_0$. В пользу сказанного свидетельствует особенно быстрый рост с уменьшением σ устойчивости встречных потоков при $\sigma\leqslant1$, $\mathrm{Re}>4\cdot10^3$ (кривая *4*), Отметим также, что ожидать значительного увеличения устойчивости периодического движения к волнам Толмина – Шлихтинга следует лишь при $\sigma>5$, т. е. при формировании пограничного слоя и ядра.

Автор благодарит Г. Ф. Шайдурова, под руководством которого была выполнена эта работа.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kerczek C. Von., Davis S. H.* Linear stability theory of oscillatory Stokes layers. J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, Pt 4.
2. *Hino M., Sawamoto M., Takasu S.* Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow. J. Fluid Mech., 1976, vol. 75, Pt 2.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Козлов В. Г., Шайдуров Г. Ф.* Движение жидкости, периодически прокачиваемой через канал. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1976, № 362.
5. *Сергеев С. И.* О колебаниях жидкости в трубах при умеренных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А.* Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
7. *Монин А. С.* О природе турбулентности. Успехи физ. н., 1978, т. 125, вып. 1.

УДК 532.5.013.4:538.4

ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. В. ЩЕЛКАЧЕВ

(Москва)

В работе исследуется гравитационная неустойчивость границы раздела двух несжимаемых жидкостей, находящихся в электромагнитном поле, параллельном границе, когда одна из жидкостей имеет конечную проводимость, а другая непроводящая. Магнитное число Рейнольдса R_m считается конечным. Показано, что при любых R_m электромагнитное поле не может стабилизировать границу раздела (если обе жидкости проводящие, то стабилизации также нет), хотя могут существовать устойчивые направления распространения возмущений. Наибольший рост возмущений приходится на волны, распространяющиеся нормально вектору начального магнитного поля, при этом электромагнитное поле и проводимость стенок не влияют на эти возмущения. Используя метод малого параметра, получено дисперсионное уравнение для малых индуцированных магнитных полей. Показано, что область значений углов между волновым вектором и вектором начального магнитного поля, соответствующая неустойчивым возмущениям, возросла по сравнению со случаем, когда $R_m\ll1$ [1] [1].

---

[1] В статье [1] были допущены следующие опечатки по вине автора. Всюду, где написано, что возмущения распространяются вдоль магнитного поля ($\mathbf{k}\|\mathbf{H}_0$), должно быть написано, что возмущения распространяются нормально магнитному полю ($\mathbf{k}\perp\mathbf{H}_0$).

1. Постановка задачи. Рассмотрим два плоских бесконечных слоя несжимаемых, проводящих и однородных тяжелых жидкостей, находящихся в контакте друг с другом (плоскость $z=0$) и ограниченных непроницаемыми стенками ($z=l_1$, $z=-l_2$). Жидкости находятся в поле силы тяжести $\mathbf{f}=(0,\ 0,\ -g)$, нормальной к поверхности раздела сред. Параллельно к границе раздела приложены однородное электрическое $\mathbf{E}_0(0,\ E_0,\ 0)$ и магнитное $\mathbf{H}_0(H_0+C(l_1,\ l_2),\ 0,\ 0)$ поля, при этом $H_0=\mathrm{const}$, а $C(l_1,\ l_2)$ – функция, зависящая от ширины проводящих слоев и постоянная в каждом слое, о величине которой скажем ниже. Считается, что в начальный момент времени среда покоилась и верхний слой жидкости тяжелее нижнего. На границе раздела, являющейся контактным разрывом, магнитное поле, нормальные составляющие плотности электрического тока, касательные составляющие электрического поля и нормальные компоненты тензора плотности полного потока импульса непрерывны, а нормальные составляющие скорости частиц жидкости равны скорости контактного разрыва. Электрический ток $\mathbf{j}_0=\sigma\mathbf{E}_0$, протекающий в любом плоском бесконечном слое проводящей жидкости шириной $|z_1-z_2|$, индуцирует магнитное поле $\mathbf{h}_0$, которое в силу закона Био – Савара равно

$$\mathbf{h}_0=-\frac{2\pi j_0}{c}[|z_1-z|-|z_2-z|]\mathbf{e}_x$$

Не умаляя общности постановки задачи, функцию $C(l_1,\ l_2)$ подберем так, чтобы магнитное поле с учетом индуцированного было равно

$$\mathbf{H}_0^*=H_0\left(1+\frac{4\pi j_0}{cH_0}z\right)\mathbf{e}_x$$

В общепринятых обозначениях линеаризованная система уравнений для возмущений имеет вид

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t}+\nabla p^{*\prime}-\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}_0^*\nabla)\mathbf{H}'-\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}_0^*=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}+(\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{H}_0^*-(\mathbf{H}_0^*\nabla)\mathbf{v}'-\nu_m\Delta\mathbf{H}'=0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}'=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}'=0,\qquad p^*=p+\frac{H^{*2}}{8\pi}$$

В случае плоских возмущений, волновой вектор которых нормален вектору магнитного поля $\mathbf{H}_0^*$, скорость потенциальна и не входит в уравнения индукции для компонент H_y' и H_z', а магнитное поле входит в уравнение индукции и в граничное условие для давления только в член, содержащий полное давление p^*. Тогда система уравнений (1.1) и граничные условия разбиваются на две независимые системы уравнений, одна из которых содержит неизвестные v_y', v_z' и $p^{*\prime}$ и имеет такой же вид, как и при отсутствии магнитного поля. Следовательно, граница раздела неустойчива и дисперсионное уравнение так же, как и дисперсионные уравнения в работах [1, 2], совпадает с уравнением, полученным в газовой динамике [3].

Таким образом, неустойчивость не зависит от величины начального электромагнитного поля и от проводимости обеих жидкостей и стенок независимо от величины индуцированного магнитного поля и при любых магнитных числах Рейнольдса R_m. В случае сжимаемых жидкостей скорость непотенциальна, но граница раздела тоже неустойчива, при этом неустойчивость зависит от величины начального электромагнитного поля [1].

Рассмотрим, как ведут себя волны, распространяющиеся по любым направлениям, в случае, когда верхний слой жидкости непроводящий, а нижний имеет конечную проводимость $\sigma(R_m\sim1)$.

Отличие данной постановки задачи от постановки задачи [1] заключается в конечности R_m и учете индуцированных магнитных полей. Система (1.1) позволяет искать решение в виде

$$A'=a(z)\exp(ik\cos\varphi x+ik\sin\varphi y+\omega t)$$

$$k=|\mathbf{k}|,\qquad \mathbf{k}=(k\cos\varphi,\ k\sin\varphi,\ 0)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – волновой вектор, а φ – угол, образованный осью x и вектором $\mathbf{k}$. Уравнения для амплитуд компонент скорости и магнитного поля по оси Z для нижнего слоя жидкости имеют вид

$$\frac{\delta N^2}{k^4}\frac{d^4a_i}{dz^4}-\frac{2\alpha\delta N}{k^3}\frac{d^3a_i}{dz^3}+\frac{1}{k^2}\{2\alpha^2\delta-N^2[\delta+\varepsilon+(N^2-1)B\cos^2\varphi]\}\frac{d^2a_i}{dz^2}+ \tag{1.2}$$

$$+\frac{2\alpha NQ_i}{k}\frac{da_i}{dz}-\{2\alpha^2\delta T_i-N^2[\varepsilon+(N^2-1)B\cos^2\varphi]\}a_i=0$$

$$i=1,2,\quad a_1=v_z,\quad a_2=h_z,\quad \delta=\frac{\omega}{\sqrt{kg}},\quad \alpha=\frac{4\pi j_0}{ckH_0}$$

$$N=1+\alpha kz,\quad B=\frac{\sigma H_0^2}{c^2\rho_0\sqrt{g/k}\,k},\quad \lambda=\frac{\sqrt{g/k}}{\nu_m k}$$

$$\varepsilon=\delta+\lambda\delta^2+B\cos^2\varphi,\quad T_1=1,\quad T_2=1+\lambda\delta$$

$$Q_1=\delta-N^2B\cos^2\varphi,\quad Q_2=\delta T_2$$

Уравнения (1.2) решаются в предположении малости магнитных полей, индуцированных электрическими токами, протекающими в проводящей жидкости шириной $l=1/k$, по сравнению с начальным магнитным полем H_0^*, т. е. $\alpha\ll1$. Тогда уравнение (1.2) можно линеаризовать по α и, воспользовавшись методом малого параметра, искать решения в виде ряда [4], причем в силу линейности задачи можно ограничиться первыми двумя членами разложения. Пусть стенки бесконечно удалены от границы раздела (l_1, $l_2=\infty$), тогда, учитывая, что при $z\to\pm\infty$ возмущения исчезают, можно получить решения уравнений (1.2) и, пользуясь их связью с системой (1.1), решение системы уравнений (1.1) для амплитуд скорости по оси Z, магнитного поля и давления.

Параметры, характеризующие верхний слой жидкости, в дальнейшем будем отмечать индексом 1, а нижний – 2. Для верхнего слоя жидкости при $\sigma_2=0$ в системе уравнений (1.1) уравнение индукции заменяется уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{H}'=0$, а в уравнение импульсов величина магнитного поля не входит.

Заметим, что при сведении системы дифференциальных уравнений для амплитуд соответствующей системы (1.1) к дифференциальным уравнениям четвертого порядка (1.2) якобиан, определяющий возможность этого перехода [4], при $\sigma=0$ обращается в нуль. Поэтому уравнения (1.2) при $\sigma=0$ не соответствуют уравнениям, характеризующим верхний слой жидкости.

Обозначая через $b=b(x, y)$ смещение границы раздела вдоль оси Z, в линейном случае получим, что $v_{zi}=\partial b/\partial t$, тогда граничные условия на контактном разрыве имеют следующий вид:

$$v_{z1}=v_{z2},\quad h_{z1}=h_{z2} \tag{1.3}$$

$$\frac{\lambda p_2}{\rho_{02}g/k}-\frac{1}{\delta}\left[\frac{\alpha}{\lambda}B+1\right]\frac{\lambda v_{z2}}{\sqrt{g/k}}=\left[\frac{\lambda p_1}{\rho_{01}g/k}-\frac{1}{\delta}\frac{\lambda v_{z1}}{\sqrt{g/k}}\right]R$$

$$\frac{\alpha}{\delta}\frac{\lambda v_{z2}}{\sqrt{g/k}}+\frac{h_{x2}}{H_0}=\frac{h_{x1}}{H_0},\quad \frac{\alpha}{\delta}\frac{\lambda v_{z2}}{\sqrt{g/k}}\sin\varphi=\frac{h_{y2}}{H_0}\cos\varphi+\frac{h_{x2}}{H_0}\sin\varphi$$

$$B\frac{\alpha}{\lambda}=\frac{j_0H_0}{c\rho_{02}g}=D$$

Величина D в (1.3) не зависит от σ и k.

2. Получение и исследование дисперсионного уравнения. Используя граничные условия (1.3) из решения системы уравнений (1.1), получаем дисперсионное уравнение

$$F(\delta,\lambda,B\cos^2\varphi,\alpha B\cos^2\varphi,R)=4B^2\cos^4\varphi(\delta+B\cos^2\varphi)[(\delta R+\sqrt{\varepsilon\delta})\delta+ \tag{2.1}$$

$$+\frac{\alpha}{\lambda}B\cos^2\varphi-(R-1)]+2\lambda\delta B\cos^2\varphi(\delta+B\cos^2\varphi)\{\delta^2[\delta(3R+1)+$$

$$+\sqrt{\varepsilon\delta}(R+3)]-(3\delta+\sqrt{\varepsilon\delta})(R-1)\}+2\lambda^2\delta^3\{2\delta B\cos^2\varphi[\delta(\delta R+\sqrt{\varepsilon\delta})-(R-1)]+$$

$$+(\varepsilon+B\cos^2\varphi)(\delta+\sqrt{\varepsilon\delta})[\delta^2(R+1)-(R-1)]\}+\alpha B\cos^2\varphi\{8(R-1)(\delta+B\cos^2\varphi)\times$$

$$\times(\sqrt{\varepsilon\delta}-B\cos^2\varphi)+6\varepsilon\delta\sqrt{\varepsilon\delta}(\lambda\delta^2+B\cos^2\varphi)+2\delta^2B\cos^2\varphi(4R\varepsilon+\delta+3B\cos^2\varphi)+$$

$$+\lambda\delta^2(R-1)(8\sqrt{\varepsilon\delta}-B\cos^2\varphi+6\delta+7\lambda\delta^2)+\lambda\delta^4[(7R-3)\varepsilon+\delta(R+1)]\}=0$$

$$R=\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}>1$$

Неустойчивость имеет место только в случае существования у дисперсионного уравнения корней с положительной действительной частью. Пусть $B=0$ или $\cos^2\varphi=0$ в уравнении (2.1), тогда получаем

$$2\lambda^2\delta^5(1+\lambda\delta)(1+\sqrt{1+\lambda\delta})(R-1)(\delta^2-S)=0,\qquad 0<S=\frac{R-1}{R+1}<1$$

В этом случае имеется один положительный корень $\delta=\sqrt{S}=d_1$, совпадающий с корнем, полученным в газодинамическом случае [3].

Если $R_m\ll 1$, то $\lambda\to 0$ и согласно [5] $\alpha\sim\lambda\to 0$ и тогда получаем [1]

$$\delta[\delta R+\sqrt{\delta^2+\delta B\cos^2\varphi}]+D\cos^2\varphi-(R-1)=0 \tag{2.2}$$

При $\cos^2\varphi<(R-1)/D$ уравнение (2.2) имеет только один корень d_2 с положительной действительной частью, причем d_2 действительный и $d_2\leqslant d_1$. Свободный член уравнения (2.1) равен

$$4B^3\cos^6\varphi[D\cos^2\varphi-(R-1)(2\alpha+1)]$$

и имеет конечное значение, тождественно не равное нулю при α, $\lambda\to 0$. При $\cos^2\varphi<(R-1)(2\alpha+1)/D$ у уравнения (2.1) имеется всегда положительный действительный корень d_3, такой, что $d_3\leqslant d_2\leqslant d_1$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Следовательно, всегда имеются неустойчивые возмущения, определяемые корнем d_3, наибольший рост таких возмущений приходится на волны, распространяющиеся нормально начальному магнитному полю ($\mathbf{k}\perp\mathbf{H}_0$), причем область неустойчивости углов φ уравнения (2.1) шире области углов φ уравнения (2.2).

В уравнении (2.1) члены, содержащие α и λ, имеют более высокий порядок по δ, чем другие члены, следовательно, при $\alpha\sim\lambda\to 0$ корни уравнения (2.1), обусловленные конечным R_m, будут стремиться к бесконечности. Считая $\delta\sim\lambda^{-n}$, где $\alpha\sim\lambda$ малые, а $n>0$, найдем эти корни

$$\delta^2=-B\cos^2\varphi/\lambda,\qquad \omega/k=\pm\sqrt{g/k}a_A\cos\varphi i,\qquad a_A=H_0/\sqrt{4\pi\rho_{02}}$$

Так как эти корни чисто мнимые, то они не влияют на рост неустойчивости.

Автор благодарен А. А. Бармину и А. Г. Куликовскому за постоянное внимание к работе.

Поступила 30 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щелкачев М. В.* Тейлоровская неустойчивость границы раздела двух жидкостей, находящихся в электромагнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
2. *Нгуен Дак.* Изучение неустойчивости типа Рэлея – Тейлора в магнитной гидродинамике. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую, и топливные элементы, 1968, вып. 7.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л., Гостехиздат, 1947.
4. *Эльсгольц Л. Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965.
5. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.