**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1979**

УДК 532.5

О КОМБИНИРОВАННОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

С. Г. ЧЕРКАСОВ

(Москва)

Рассмотрена комбинированная (свободная и вынужденная) конвекция вязкопластической жидкости Шведова – Бингама в плоском вертикальном слое. Исследуется влияние температурной зависимости предельного напряжения сдвига на условия возникновения течения и стационарный режим конвекции при подогреве сбоку.

Естественная конвекция вязкопластической жидкости Шведова – Бингама в плоском вертикальном слое рассматривалась в работах [1, 2]. В [1] изучался стационарный режим естественной конвекции при боковом подогреве. В [2] исследовалась устойчивость естественно-конвективного движения при подогреве снизу. В этих работах предельное напряжение сдвига считалось не зависящим от температуры. Однако для многих реальных вязкопластических сред температурная зависимость предельного напряжения сдвига весьма существенна.

Рассматривается стационарное плоскопараллельное движение жидкости в пространстве между двумя бесконечными вертикальными изотермическими пластинами с температурами T_0 и T_1 ($T_1>T_0$). Реологические свойства жидкости Шведова – Бингама описываются законом, который в случае одномерного сдвигового течения имеет вид

$$\tau=\tau_p\,\mathrm{sign}(\gamma)+\mu\gamma,\quad |\tau|>\tau_p,\quad \gamma=0,\quad |\tau|<\tau_p$$

Здесь τ – касательное напряжение, γ – величина градиента скорости, τ_p – предельное напряжение сдвига, μ – динамическая вязкость.

В дальнейшем будем считать течение одномерным и пренебрегать вязкой диссипацией. В этих предположениях безразмерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска [3] имеют следующий вид

$$\mathrm{Gr}\,\theta-A+d\tau/dx=0 \tag{1}$$

$$\theta=x-{}^1/_2 \tag{2}$$

$$\tau=\tau_0\,\mathrm{sign}(dv/dx)+dv/dx,\quad |\tau|>\tau_0 \tag{3}$$

$$dv/dx=0,\quad |\tau|<\tau_0 \tag{4}$$

Здесь τ – касательное напряжение, v – скорость, θ – отклонение температуры от средней, $\mathrm{Gr}=\rho^2g\beta(T_1-T_0)L^3/\mu^2$ – число Грасгофа, τ_0 – предельное напряжение сдвига, $A=\partial p/\partial y$, p – отклонение давления от гидростатического, β – коэффициент температурного расширения, ρ – плотность при средней температуре, g – ускорение свободного падения, L – толщина слоя; масштаб скорости равен $\mu/\rho L$, длины – L, напряжения и давления – $\mu^2/\rho L^2$, температуры – T_1-T_0. Ось x направлена поперек слоя, ось y – против направления силы тяжести.

Будем предполагать, что предельное напряжение сдвига связано с температурой зависимостью

$$\tau_0=H\left[1-\left(\theta+\frac{1}{2}\right)S\right],\quad 0\leqslant S\leqslant 1,\quad H=\frac{\rho L^2}{\mu^2}\tau_p|_{T=T_0}.$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничным условиям прилипания на твердых поверхностях

$$v|_{x=0}=v|_{x=1}=0 \tag{5}$$

Критериями подобия в данной задаче являются параметры: Gr; H, S, A.

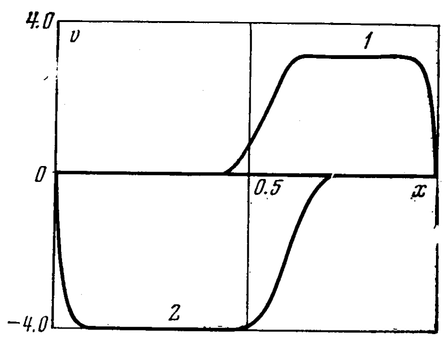
В случае только естественной конвекции параметр A не является независимым критерием подобия, а определяется из условия

$$\int_0^1 v\,dx = 0 \tag{6}$$

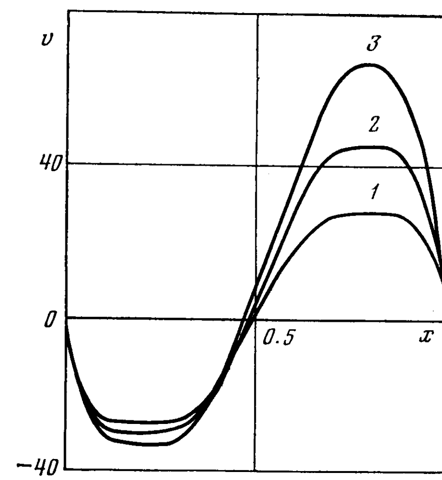
Интегрируя (2) с учетом (3), определяем касательное напряжение

$$\tau = -{}^1/_2 \mathrm{Gr}(x-{}^1/_2)^2 + Ax + C \tag{7}$$

Выражение для профиля скорости можно получить, интегрируя (3) с учетом (7). Константы интегрирования определяются из граничных условий (5).



Фиг. 1



Фиг. 2

Используя формулы (3), (4), (5), (7), можно определить пороговое число Грасгофа Gr_*, т. е. максимальное число Грасгофа, при котором жидкость покоится

$$\mathrm{Gr}_* = 2(4H + A - 3HS + \sqrt{8H^2S^2 + 16H^2 - 24H^2S + 8AH(1-S)}), \qquad -2H + HS \leqslant A \leqslant HS$$

$$\mathrm{Gr}_* = 2(4H - A - HS + \sqrt{16H^2 - 8H^2S - 8AH}), \quad HS \leqslant A \leqslant 2H - HS$$

В случае $|A| > 2H - HS$ жидкость движется при любом числе Грасгофа.

Анализ формул (3)–(7) показывает, что в случае только естественной конвекции $A = HS$ при $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_*$. Пороговое число Грасгофа в этом случае зависит только от параметров H и S

$$\mathrm{Gr}_* = 4H(2 - S + 2\sqrt{1-S})$$

Если $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_*$, то имеют место следующие соотношения:

$$|\tau(1)| = \tau_0(1), \quad A \leqslant HS$$

$$|\tau(0)| = \tau_0(0), \quad A \geqslant HS$$

Рассмотрим движение жидкости при заданном значении параметра A (смешанная конвекция). Обозначим через Gr_{**} число Грасгофа, при котором

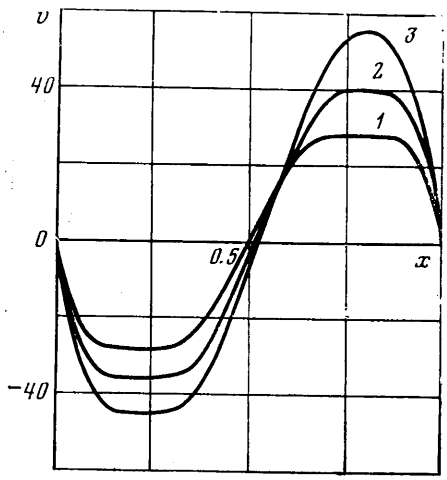
$$|\tau(0)| = \tau_0(0), \quad A \leqslant HS$$

$$|\tau(1)| = \tau_0(1), \quad A \geqslant HS$$

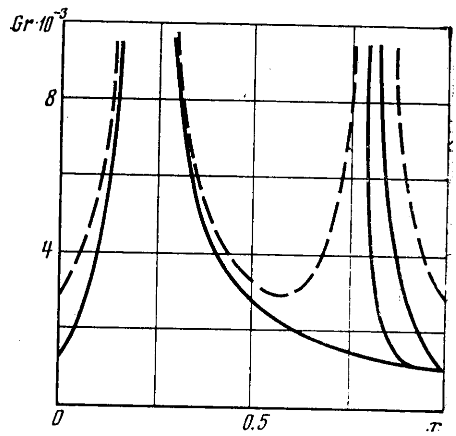
На фиг. 1 показаны профили скорости при $\mathrm{Gr} = 3.5 \cdot 10^3 < \mathrm{Gr}_{**}$, $H = 250$, $S = 0.5$ (*1* – $A = 0$; *2* – 250). Видно, что движется лишь часть жидкости. Причем если $A < HS$, то жидкость неподвижна вблизи холодной стенки и движется вверх вблизи горячей. В случае $A > HS$ жидкость вблизи холодной стенки движется вниз и неподвижна вблизи горячей стенки. В обоих случаях имеется две квазитвердые зоны ($|\tau| < \tau_0$) и две зоны вязкопластического течения ($|\tau| > \tau_0$).

Если $Gr > Gr_{**}$, то структура течения иная: имеется три зоны вязкопластического течения (две пристеночные зоны и зона в центральной части слоя). На фиг. 2 представлены профили скорости при $Gr=9.5\cdot10^3 > Gr_{**}$, $H=250$, $A=0$ (*1* – $S=0$; *2* – 0,5; *3* – 1). Видно, что температурная зависимость предельного напряжения сдвига оказывает существенное влияние на величину скорости у горячей стенки и гораздо меньше сказывается на скоростях вблизи холодной стенки.

Рассмотрим теперь естественную конвекцию. В этом случае $Gr_{**}=Gr_{*}$, т. е. при движении жидкости имеется три зоны вязкопластического течения независимо от значения числа Грасгофа. На фиг. 3 показаны профили скорости при $Gr=9.5\cdot10^3$, $H=250$, (*1* – $S=0$; *2* – 0.5; *3* – 1). В отличие от течения при заданной величине градиента давления, температурная зависимость предельного напряжения сдвига приводит к существенному изменению скоростей во всей области течения.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены координаты границ квазитвердых зон для различных значений числа Грасгофа ($H=250$) при $S=0.5$ (пунктирные линии) и $S=1$. Видно, что увеличение параметра S приводит к появлению качественных различий в зависимости координат границ квазитвердых зон от числа Грасгофа. Во-первых, координата левой границы правой квазитвердой зоны монотонно уменьшается с ростом числа Грасгофа при $S=1$ и монотонно увеличивается при $S=0.5$. Во-вторых, при увеличении числа Грасгофа ширина более горячей (правой) квазитвердой зоны монотонно уменьшается при $S=0.5$, тогда как в случае $S=1$ она имеет максимум при некотором числе Грасгофа.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yang W. J., Jeh H. C.* Free convective flow of Bingham plastic between two vertical plates. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1965, vol. 87, No. 2.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О конвективной устойчивости жидкости Бингама. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 1.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.