

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЖИМОВ ТЕПЛООБМЕНА В ЛОБОВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ТЕЛА, ОБТЕКАЕМОГО ПОТОКОМ ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА

В. М. АГРАНАТ, В. Н. БЕРЦУН, А. М. ГРИШИН

(Томск)

Постановка и решение стационарной задачи о теплообмене в окрестности лобовой точки тела постоянной температуры, обтекаемого потоком диссоциированного воздуха, даны в [1]. В работе [2] приведены результаты численного решения указанной задачи в нестационарной постановке, при этом для всех просчитанных вариантов имело место установление стационарного режима теплообмена.

В настоящей работе проведено исследование устойчивости стационарных режимов теплообмена в лобовой точке, обтекаемой потоком диссоциированного воздуха, при помощи метода функционала Ляпунова [3, 4] и методики работ [2, 5], основанной на использовании известного в теории пограничного слоя метода Мексина [6, 7]. Установлено, что сколь угодно сильный рост числа Дамкеллера не приводит к неустойчивости и множественности стационарных режимов в отличие от случая обтекания лобовой точки термостата горючей смесью газов [2, 5, 8]. В результате численного решения уравнений пограничного слоя для широкого диапазона чисел Дамкеллера подтверждены результаты приближенного качественного анализа и показано, что в ряде случаев время установления стационарного состояния — немонотонная функция числа Дамкеллера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание лобовой критической точки холодного тела вращения с постоянной температурой поверхности T_w потоком нагретого диссоциированного воздуха. Температура набегающего потока в точке торможения $T_0 \gg T_w$, в результате чего реакция рекомбинации протекает только вблизи поверхности тела. Исследуем вопрос об устойчивости стационарных режимов теплообмена в окрестности лобовой критической точки.

В рамках допущений, принятых в [1, 2], нестационарный теплообмен в лобовой точке, обтекаемой диссоциированным воздухом, описывается следующей краевой задачей:

$$(1.1) \quad C_1 \left[\frac{\partial c_A}{\partial \tau} + \frac{\partial c_A}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial \tau} d\eta \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Sc} \frac{\partial c_A}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial c_A}{\partial \eta} - C_1 m$$

$$(1.2) \quad C_1 c \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial \tau} d\eta \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{cl}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + cf \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{el}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial c_A}{\partial \eta} + \Psi$$

$$(1.3) \quad \frac{d}{d\eta} \left(l \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 - \frac{\rho_s}{\rho} \right], \quad \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{1+c_A}{1+c_{AS}} \theta$$

$$(1.4) \quad \eta=0: f = \frac{df}{d\eta} = 0; \quad \theta = \theta_w; \quad c_A = c_{AEw} = 0; \quad \frac{\partial c_A}{\partial \eta} = 0$$

$$(1.5) \quad \eta \rightarrow \infty: \frac{df}{d\eta} \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1, \quad c_A \rightarrow c_{AS}$$

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{R^2 T_s^{3.5}}{K_1 P_s^2}, \quad m = \theta^{-3.5} \frac{c_A^2 - c_{AE}^2}{1+c_A}, \quad \theta = \frac{T}{T_s}$$

$$l = \frac{\rho \mu}{\rho_w \mu_w} = \left[\frac{1}{1+c_A} \right]^{3/2} \frac{\theta_w}{\theta} \left\{ \left(\frac{T_s \theta}{300} \right)^{3/2} \frac{413}{T_s \theta + 113} + \right. \\ \left. + 3.7 \left[\frac{T_s \theta}{10000} \right]^2 - \left[\frac{T_s \theta}{10000} \right]^4 \right\}$$

$$c = \frac{c_p'}{c_{pw}'} = \frac{10}{7} c_A + \left\{ 1 + \frac{2}{7} \exp \left(-\frac{\theta_v^2}{\theta^2} \right) \right\} (1-c_A)$$

$$e = \frac{c_{pA} - c_{pM}}{c_{pM}'} = \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \exp \left(-\frac{\theta_v^2}{\theta^2} \right), \quad c_p' = c_A c_{pA} + (1-c_A) c_{pM}$$

$$\theta_v = \frac{T_v}{T_s}, \quad C_1 = \frac{1}{t_* \beta_x}, \quad C_2 = \frac{h_D}{c_{pw}' T_s}, \quad \Psi = C_1 C_2 m$$

В (1.4) третье условие для c_A соответствует каталитической, а четвертое — некаталитической поверхности тела.

Здесь τ и η — безразмерные время и координата Дородницына в форме Лиза; t — время; t_* — характерное химическое время; f , θ , c_A — безразмерные функция тока, температура и весовая концентрация атомов; θ_v — безразмерная вибрационная температура молекул; T — температура; T_v — вибрационная температура молекул, принятая равной 800°K ; m , l , c , e — безразмерные функции; C_1 , C_2 — числа Дамкеллера первого и второго рода; Pr , Sc — числа Прандтля и Шмидта; p , ρ , μ — давление, плотность, вязкость; R — универсальная газовая постоянная; c_{pA} , c_{pM}' и c_p' — теплоемкости при постоянном давлении для атомов, молекул и атомно-молекулярной смеси; K_1 — постоянная скорости рекомбинации; h_D — энтальпия диссоциации единицы массы воздуха внешнего потока; β_x — градиент скорости в лобовой точке; индексы s , w , E относятся к характеристикам атомно-молекулярной смеси в точке торможения набегающего потока, на поверхности тела и в равновесном состоянии соответственно.

Вывод уравнений (1.1)–(1.5) и обсуждение правомерности допущений, использованных при выводе, можно найти в работах [1, 2].

Итак, исследование устойчивости стационарных режимов теплообмена сводится к анализу устойчивости стационарных решений краевой задачи (1.1)–(1.5).

2. Анализ устойчивости методом функционала Ляпунова. Проведем линейный анализ устойчивости стационарных решений задачи (1.1)–(1.5) по схеме, предложенной в [4].

Предположим, что при $\tau > 0$ выполняются соотношения

$$(2.1) \quad f = f^0(\eta), \quad l = l^0(\eta), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{\rho}{\rho_s} = 0$$

где верхний индекс градус относится к стационарным значениям.

В работах [9, 10], где сделано аналогичное допущение, показано, что оно не приводит к дестабилизации полей температуры и концентрации. Апостериори допущение (2.1) оправдывается согласованием результатов аналитического исследования и численного анализа (см. п. 4).

Ограничимся вначале рассмотрением случая, когда $Pr = Sc$. В этом случае удобно вместо уравнения энергии в форме (1.2) использовать уравнение энергии в виде [1, 2]

$$(2.2) \quad C_1 \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial g}{\partial \eta}, \quad g = \frac{h + U^2/2}{h_s}$$

где h — удельная энтальпия смеси, а U — проекция скорости на ось X .
Положим

$$(2.3) \quad c_A = c_A^\circ + u(\eta, \tau), \quad g = g^\circ + v(\eta, \tau), \quad m = m^\circ + m_c^\circ u + m_g^\circ v$$

Здесь u и v — малые отклонения от стационарных профилей $c_A^\circ(\eta)$ и $g^\circ(\eta)$, а m_c°, m_g° — стационарные значения следующих величин:

$$m_c = \frac{(1 + c_A)^2 - (1 - c_{AE})^2}{\theta^{3.5} (1 + c_A)^2} - \frac{h_D + (h_A - h_m) c_{AS}}{c_{AS} h_s} m_g$$

$$m_g = - \frac{3.5 h_s (c_A^2 - c_{AE}^2)}{\theta^{4.5} c_p' T_s (1 + c_A)}$$

Подставляя соотношения (2.3) в уравнения (1.1), (2.2) и учитывая граничные условия (1.4), (1.5) и допущения (2.1), получим в линейном приближении два дифференциальных уравнения для возмущений u и v со следующими граничными условиями:

$$(2.4) \quad C_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Sc} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial u}{\partial \eta} - C_1 (m_c^\circ u + m_g^\circ v)$$

$$(2.5) \quad C_1 \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Pr} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$(2.6) \quad \eta = 0: \quad v = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$(2.7) \quad \eta = \eta_\infty: \quad u = v = 0$$

В (2.6) первое условие для u на стенке соответствует каталитической, а второе — некаталитической поверхности.

Значение $\eta = \eta_\infty$ в граничном условии (2.7) моделирует бесконечность: согласно расчетам [1, 2] можно принять $\eta_\infty = 3$. Выбирая функционал Ляпунова в форме [3, 4]

$$V = \frac{1}{2} C_1 \int_0^{\eta_\infty} (u^2 + v^2) d\eta$$

с учетом (2.4), (2.5) находим

$$(2.8) \quad \frac{dV}{d\tau} = \int_0^{\eta_\infty} u \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Sc} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial u}{\partial \eta} - C_1 (m_c^\circ u + m_g^\circ v) \right] d\eta + \int_0^{\eta_\infty} v \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Pr} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] d\eta$$

В силу граничных условий (2.6), (2.7) имеем

$$(2.9) \quad \int_0^{\eta_{\infty}} u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Sc} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\eta = - \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{l}{Sc} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

$$\int_0^{\eta_{\infty}} v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Pr} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta = - \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{l}{Pr} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

$$(2.10) \quad \int_0^{\eta_{\infty}} fu \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = - \frac{1}{2} \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{df}{d\eta} u^2 d\eta, \quad \int_0^{\eta_{\infty}} fu \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = \\ = - \frac{1}{2} \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{df}{d\eta} v^2 d\eta$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$(2.11) \quad \int_0^{\eta_{\infty}} uv (-C_1 m_g^{\circ}) d\eta \leq \frac{1}{2} C_1 \int_0^{\eta_{\infty}} (u^2 + v^2) |m_g^{\circ}| d\eta$$

Согласно (2.8) – (2.11), получим

$$(2.12) \quad \frac{dV}{d\tau} \leq \int_0^{\eta_{\infty}} u^2 F_u d\eta - \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{l}{Sc} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta + \int_0^{\eta_{\infty}} v^2 F_v d\eta - \int_0^{\eta_{\infty}} \frac{l}{Pr} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \\ F_u \equiv - \frac{1}{2} \frac{df}{d\eta} + C_1 \left(\frac{1}{2} |m_g^{\circ}| - m_c^{\circ} \right), \quad F_v \equiv - \frac{1}{2} \frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} C_1 |m_g^{\circ}|$$

Поскольку в силу граничного условия (2.7) и неравенства Шварца [11]

$$u^2 = \left(\int_{\eta}^{\eta_{\infty}} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \right)^2 \leq (\eta_{\infty} - \eta) \int_0^{\eta_{\infty}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \\ v^2 = \left(\int_{\eta}^{\eta_{\infty}} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta \right)^2 \leq (\eta_{\infty} - \eta) \int_0^{\eta_{\infty}} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

а $l \geq l_S \equiv (\rho_S \mu_S) / (\rho_w \mu_w) > 0$, то неравенство (2.12) принимает вид

$$(2.13) \quad \frac{dV}{d\tau} \leq \int_0^{\eta_{\infty}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\eta_{\infty} - \eta) F_u d\eta - \frac{l_S}{Sc} \right] + \\ + \int_0^{\eta_{\infty}} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} (\eta_{\infty} - \eta) F_v d\eta - \frac{l_S}{Pr} \right]$$

Здесь α_1 , α_2 и β_1 , β_2 – интервалы изменения η , в которых положительны функции F_u и F_v соответственно. Если функции F_u и F_v неположительны всюду в интервале $(0, \eta_{\infty})$, то неравенство (2.12) приводится к виду $dV/d\tau < 0$, что свидетельствует

об асимптотической устойчивости стационарных решений краевой задачи (1.1)–(1.5).

Из (2.13) вытекают следующие достаточные условия устойчивости:

$$(2.14) \quad J_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\eta_\infty - \eta) F_u d\eta < \frac{l_S}{Sc}, \quad J_2 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\eta_\infty - \eta) F_v d\eta < \frac{l_S}{Pr}$$

Из определения функций F_u, F_v следует, что если $C_1 \ll 1$, то при $\eta \in (\alpha_1, \alpha_2)$ выполняется неравенство $F_u \ll 1$, а при $\eta \in (\beta_1, \beta_2)$ — неравенство $F_v \ll 1$, поэтому при $C_1 \ll 1$ условия устойчивости (2.14) оказываются выполненными.

Таким образом, если $C_1 \ll 1$, то стационарные решения краевой задачи (1.1)–(1.5) асимптотически устойчивы. Если C_1 достаточно велико, то условия (2.14) могут не выполняться, что свидетельствует о возможности неустойчивости в этом случае.

Следует заметить, что результаты анализа устойчивости, полученные выше при условии, что $Pr = Sc$, легко распространить на общий случай, когда $Pr \neq Sc$, если допустить, что перенос энергии в результате диффузии мал по сравнению с переносом энергии в результате кондукции и конвекции, а $c_p' \approx c_{pw}'$, т. е. если в уравнении (1.2) положить $e = 0, c = 1$. Анализ устойчивости в этом случае полностью аналогичен анализу, проведенному при $Pr = Sc$, и приводит к прежнему результату: при $C_1 \ll 1$ стационарное решение асимптотически устойчиво.

3. Качественный анализ режимов теплообмена при помощи теории динамических систем. Известно [12], что метод функционала Ляпунова позволяет получать лишь достаточные условия устойчивости стационарных решений краевых задач для параболических систем, поэтому при достаточно больших значениях C_1 в случае невыполнения условий (2.14) вопрос об устойчивости стационарных решений краевой задачи (1.1)–(1.5) остается открытым и необходимо привлечение других методов анализа устойчивости. Ниже проведем пригодное в случае достаточно больших значений C_1 качественное исследование краевой задачи (1.1)–(1.5), которое основано на использовании модификации [5] метода Мексина [6, 7] и теории динамических систем [13].

Дважды интегрируя уравнения (1.1), (1.2) по переменной η и учитывая граничные условия (1.4), (1.5), получим

$$(3.1) \quad c_{AS} = c_{Aw} + Sc I_1 + v_w I_2, \quad 1 = \theta_w + Pr I_3 + u_w I_4$$

$$I_1 = \int_0^\infty l^{-1} \exp\left(-Sc \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) \int_0^\eta Q_1 \exp\left(Sc \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) d\eta d\eta$$

$$I_2 = \int_0^\infty l^{-1} \exp\left(-Sc \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) d\eta$$

$$I_3 = \int_0^\infty (cl^{-1}) \exp\left(-Pr \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) \int_0^\eta Q_2 \exp\left(Pr \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) d\eta d\eta$$

$$I_4 = \int_0^\infty (cl)^{-1} \exp\left(-Pr \int_0^\eta \frac{f}{l} d\eta\right) d\eta$$

$$v_w \equiv \left(\frac{\partial c_A}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}, \quad u_w \equiv \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}, \quad Q_1 = Q_1(\eta, \tau) \equiv$$

$$\equiv C_1 \left(\frac{\partial c_A}{\partial \tau} + \frac{\partial c_A}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial \ln \rho / \rho_S}{\partial \tau} d\eta + m \right)$$

$$Q_2 = Q_2(\eta, \tau) \equiv C_1 \left[c \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial \ln \rho / \rho_S}{\partial \tau} d\eta \right) - C_2 m \right] -$$

$$\frac{e l}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial c_A}{\partial \eta}$$

Проведем асимптотическую оценку несобственных интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 , воспользовавшись процедурой, описанной в [5-7]. Ограничиваясь первыми ненулевыми членами разложений

$$l^{-1} \int_0^\eta Q_1 \exp \left(Sc \int_0^\eta f l^{-1} d\eta \right) d\eta = Q_1(0, \tau) \eta + \dots$$

$$(cl)^{-1} \int_0^\eta Q_2 \exp \left(Pr \int_0^\eta f l^{-1} d\eta \right) d\eta = Q_2(0, \tau) \eta + \dots$$

$$f = f''(0) \frac{\eta^2}{2} + \dots, \quad l^{-1} = 1 + \dots, \quad (cl)^{-1} = 1 + \dots$$

Находим для случаев некаталитической и каталитической поверхностей соответственно

$$(3.2) \quad I_1 = \frac{1.491 C_1}{[f''(0) Sc]^{3/2}} \left(\frac{dc_{Aw}}{d\tau} + m_w \right), \quad I_2 = \frac{1.624}{[Sc f''(0)]^{1/2}}$$

$$I_3 = - \frac{1.491 C_1 C_2 m_w}{[f''(0) Pr]^{3/2}}, \quad I_4 = \frac{1.624}{[Pr f''(0)]^{1/2}}$$

$$(3.3) \quad I_1 = \frac{C_1}{f''(0) Sc} \frac{dv_w}{d\tau}, \quad I_2 = \frac{1.624}{[Sc f''(0)]^{1/2}}$$

$$I_3 = - \frac{1.491 e_w u_w v_w}{Sc [f''(0) Pr]^{3/2}}, \quad I_4 = \frac{1.624}{[Pr f''(0)]^{1/2}}$$

Физическим основанием для проведенных выше оценок несобственных интегралов служит тот факт, что основное изменение характеристик пограничного слоя происходит вблизи поверхности тела ($\eta=0$).

Величина $f''(0)$, входящая в (3.2), (3.3), определяется при помощи двукратного интегрирования уравнения (1.3) с использованием граничных условий (1.4), (1.5) и последующей асимптотической оценки возникающих при этом несобственных интегралов

$$(3.4) \quad f''(0) = \left[0.308 \left(1 + \sqrt{1 + 4.84 \theta_w \frac{1 + c_{Aw}}{1 + c_{As}}} \right) \right]^{1/2}$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (3.1), для некаталитической и каталитической поверхностей соответственно, получим

$$(3.5) \quad \frac{dc_{Aw}}{d\tau} = -m_w + \frac{[f''(0)]^{3/2}}{1.491C_1 Sc^{1/2}} (c_{AS} - c_{Aw}) = P(c_{Aw})$$

$$(3.6) \quad u_w = \frac{[Pr f''(0)]^{1/2}}{1.624} \left\{ 1 - \theta_w + \frac{1.491C_1 C_2 Pr^{1/2}}{[f''(0)]^{3/2}} m_w \right\}$$

$$(3.7) \quad \frac{dv_w}{d\tau} = \frac{f''(0)}{C_1} \left\{ c_{AS} - \frac{1.624v_w}{[Sc f''(0)]^{1/2}} \right\} = Q(v_w)$$

$$(3.8) \quad u_w = \frac{[Pr f''(0)]^{1/2} (1 - \theta_w)}{1.624} \left\{ 1 - \frac{1.491 Pr e_w v_w}{1.624 Sc [Pr f''(0)]^{1/2}} \right\}^{-1}$$

Каждая из систем (3.5)–(3.8) является совокупностью одного дифференциального уравнения, описывающего закон изменения во времени концентрации c_{Aw} и градиента концентрации v_w соответственно, и одного конечного соотношения, связывающего в каждый момент времени текущие значения безразмерного теплового потока u_w со значениями c_{Aw} и v_w . Конечные соотношения (3.6) и (3.8), линейные относительно u_w , устанавливают однозначное соотношение между значениями c_{Aw} и v_w и соответствующими значениями u_w , поэтому анализ единственности и устойчивости стационарных режимов теплообмена сводится к анализу единственности и устойчивости физически реальных состояний равновесия [13] динамических систем первого порядка (3.5) и (3.7).

Состояния равновесия динамической системы (3.5) находятся из уравнения $P(c_{Aw}) = 0$, которое приводится к виду

$$\begin{aligned} y_1(c_{Aw}) &= 1.491 [Sc f''(0)]^{1/2} C_1 (c_{Aw}^2 - c_{AwE}^2) = \\ &= -f''(0) \theta_w^{3.5} [c_{Aw}^2 + (1 - c_{AS}) c_{Aw} - c_{AS}] = y_2(c_{Aw}) \end{aligned}$$

Параболы, определяемые функциями y_1 и y_2 , имеют только одну точку пересечения в интервале (c_{AwE}, c_{AS}) , поэтому динамическая система (3.5) имеет единственное физически реальное состояние равновесия $c_{Aw} = c_{Aw}^0$. Это состояние равновесия оказывается асимптотически устойчивым в силу того, что

$$\frac{dP}{dc_{Aw}} = - \left\{ \frac{[f''(0)]^{3/2}}{1.491C_1 Sc^{1/2}} + \frac{(1 + c_{Aw})^2 - (1 - c_{AwE}^2)}{\theta_w^{3.5} (1 + c_{Aw})^2} \right\} < 0$$

Динамическая система (3.7) также имеет единственное физически реальное состояние равновесия $v_w = v_w^0 = c_{AS} [Sc f''(0)] / 1.624$, которое асимптотически устойчиво, так как

$$\frac{dQ}{dv_w} = - \frac{1.624 [f''(0)]^{1/2}}{C_1 Sc} < 0$$

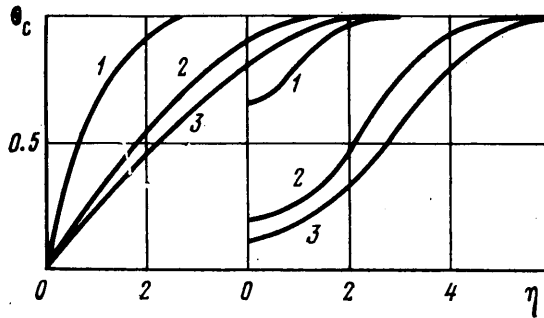
Итак, согласно результатам проведенного выше качественного анализа, при произвольном значении числа Дамкеллера C_1 стационарный режим теплообмена в окрестности лобовой критической точки термостата, обтекаемого потоком диссоциированного воздуха, оказывается единственным и устойчивым. Этот вывод согласуется с численными результатами, приведенными в [1, 2], и с выводом о единственности стационарного ре-

жима теплообмена лобовой точки термостата с потоком диссоциированного воздуха, сделанным в работе [14] на основании физических соображений.

Следует отметить, что при $C_1 \ll 1$ аппроксимация краевой задачи (1.1) — (1.5), использованная в данном пункте, позволяет получать не только правильную качественную, но и достаточно точную количественную информацию о некоторых характеристиках пограничного слоя. Так, например, при $C_1 = 0$ результаты, полученные по формуле

$$(3.9) \quad u_w^{\circ} = \frac{[\text{Pr} f''(0)]^{1/2}}{1.624} \left[1 - \theta_w + \frac{\text{Pr}^{1/2}}{\text{Sc}^{1/2}} C_2 (c_{AS} - c_{Aw}) \right]$$

являющейся комбинацией соотношений (3.5), (3.6), записанных для стационарного режима ($dc_{Aw}/d\tau = 0$), отличаются от численных результатов



Фиг. 1

[1] (см. фиг. 7, 8) на 3%. С ростом C_1 отличие возрастает: при $C_1 = 10^{-4}$ оно составляет 23.8%, при $C_1 = 10^{-3}$ — 49%, при $C_1 = 10^{-1}$ — 78%.

4. Численный анализ задачи. В работах [2, 15] при решении задачи о нестационарном теплообмене потока диссоциированного воздуха с инертным термостатом в окрестности лобовой критической точки воздух рассматривается как бинарная смесь атомов и молекул с усредненными по отношению к азоту и кислороду свойствами. В данной работе были проведены численные исследования нестационарного теплообмена потока диссоциированного кислорода с инертным термостатом в окрестности лобовой критической точки. Массовая скорость образования атомов в предположении, что существуют две каталитические частицы O и O₂, определялась по формуле из [16], тогда в уравнениях (1.1) и (1.2)

$$m = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left(\frac{A}{\theta} \right)^{1.5} \left[\frac{c_A^2 P_s}{600(1+c_A) \sqrt{T_s \theta}} - (1-c_A) \exp\left(-\frac{A}{\theta}\right) \right]$$

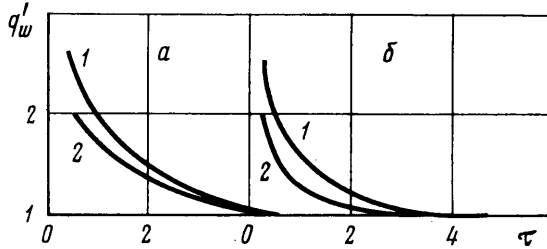
$$A = \frac{D}{RT_s} \quad D = 118 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}, \quad C_1 = \frac{2.5 \cdot 10^{11} P_s}{4R\beta_x \sqrt{T_s}}$$

Расчеты проводились при высоте $H = 30$ км и скоростях набегающего потока $3000 \text{ м/сек} \leq V_{\infty} \leq 6000 \text{ м/сек}$ для различных значений радиуса закругления r_w .

В результате расчетов установлено, что для каталитической и некаталитической поверхностей при $0 \leq C_1 \leq 500\,000$ всегда устанавливается стационарный режим теплообмена. Этот вывод подтверждается и графиками на фиг. 1, где показаны последовательные положения профиля

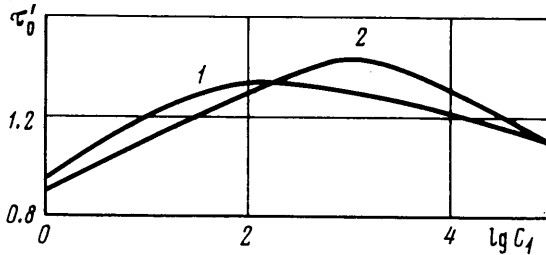
температуры и концентрации при $T_w=300^\circ\text{K}$, $C_1=10\,000$, $T_s=7000^\circ\text{K}$ в случае некаталитической поверхности.

На фиг. 2 даны зависимости относительного теплового потока $q_w'=q_w/q_w^\circ$ при обтекании некаталитической поверхности для двух значений $T_s=3300$ и 7000°K (фиг. 2, а и б соответственно) и двух значений температуры поверхности $T_w=300$ и



Фиг. 2

800°K (кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что довольно быстро устанавливается стационарное значение теплового потока q_w° , причем чем меньше T_w , тем выше при прочих равных условиях значение q_w . При $H=30\text{ км}$, $V_\infty=6\text{ км/сек}$, $r_w=0.5\text{ м}$ время установления $t_0=0.9\cdot 10^{-3}\text{ сек}$. В качестве установления принимался момент, когда



Фиг. 3

$q_w=0.99q_w^\circ$. Для всех расчетных вариантов наблюдается слабая параметрическая зависимость функции f от времени.

Таким образом, как и в случае бинарной модели воздуха, при гиперзвуковом обтекании диссоциированным кислородом наблюдается выход на стационарный режим теплообмена.

На фиг. 3 для случая некаталитической стенки показана зависимость относительно времени установления $\tau_0'=\tau_0/\tau_0^\circ$ от числа Дамкеллера при $T_s=7000^\circ\text{K}$, где $\tau_0^\circ=6.2$ — безразмерное время установления в замороженном течении (кривая 1 соответствует $T_w=300^\circ\text{K}$, а 2 — 800°K).

Как следует из анализа графиков фиг. 3, время установления для некаталитической поверхности не является монотонной функцией C_1 , в то время как для каталитической поверхности время установления монотонно возрастает с ростом C_1 и при $C_1 \rightarrow \infty$ достигает максимального конечного значения. Это согласуется с данными п. 3, согласно которым правая часть уравнения (3.7) обратно пропорциональна C_1 , а правая часть (3.5) содержит C_1 лишь в одном из слагаемых.

Поступила 26 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Фэй, Ридделл. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Агранат В. М., Берцун В. Н., Гришин А. М., Зинченко В. И. Постановка и решение некоторых новых сопряженных задач нестационарного тепло- и массообмена

- реагирующих тел с потоком реакционноспособного газа. В сб. «Тепломассообмен-5», т. 2. Минск, Изд. Ин-та тепломассообмена им. А. В. Лыкова, 1976.
3. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М., «Высшая школа», 1973.
 4. *Berger J., Lapidus L.* An introduction to the stability of distributed systems via a Liapunov functional. A. I. Ch. E. Journal, 1968, vol. 14, No. 4.
 5. *Агранат В. М., Гришин А. М.* Качественное исследование режимов нестационарного горения в пограничном слое. В сб. Численные методы механики сплошной среды, т. 8, № 5. Новосибирск, 1977.
 6. *Meksyn D.* New methods in laminar boundary-layer theorie. Oxford, LaoJ, Pergamon Press., 1961.
 7. *Резников Б. И., Смыслов Ю. Н.* Об одном методе определения трения и теплового потока в автоматических задачах пограничного слоя. ПМТФ, 1964, № 1.
 8. *Алкидас, Дурбетаки.* Теплообмен в критической точке: влияние первого параметра подобия Дамкеллера. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Теплопередача, 1972, т. 94, № 4.
 9. *Уайнгарднер, Шмиц.* Динамика гетерогенных реакций в области передней критической точки. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 9.
 10. *Lindberg R. C., Schmitz R. A.* Dynamics of heterogenous reaction at a stagnation point. Numerical study of nonlinear transient effects. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1971, vol. 14, No. 5.
 11. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полю Г.* Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
 12. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1975.
 13. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
 14. *Чанг, Фенделл, Хольт.* Неравновесные аномалии в развитии диффузионных пламен. Ракетная техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 6.
 15. *Гришин А. М., Берцун В. Н.* Применение метода расщепления и итерационно-интерполяционного метода для расчета химически неравновесных нестационарных течений в пограничном слое. Тр. 5-го Всес. сем. по численным методам мех. вязкой жидкости. ч. 1. Новосибирск, 1975.
 16. *Гинзбург И. П.* Трение и теплопередача при движении смеси газов. Л., Изд-во ЛГУ, 1975.