МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1979

УДК 533.6.011.8

О РАДИАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В ПУАЗЕЙЛЕВСКОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

М. Ш. ШАВАЛИЕВ

(Новосибирск)

В ряде экспериментов (см. [1], где приведен список экспериментальных работ) наблюдалась диффузия в радиальном направлении в процессе течения смеси по трубкам при низких давлениях. При этом более тяжелые молекулы накапливались вблизи оси трубки. Предпринятая в [1] попытка объяснить это явление влиянием барнеттовского вклада в диффузию не привела к успеху: барнеттовские члены в радиальной диффузионной скорости указывают на движение тяжелых молекул в направлении от оси трубки.

В данной работе дан полный анализ этого явления. Поставлена задача о течении смеси по цилиндрической трубке конечной длины при заданной разности давления Δp на ее концах. На основе уравнений гидродинамики барнеттовского и супербарнеттовского приближений дано последовательное асимптотическое по малому параметру ε решение; $\varepsilon=(\Delta p/p)R/L$ – относительное изменение давления вдоль трубки на расстоянии порядка R (R, L – радиус и длина трубки).

Радиальная диффузия имеет место в квадратичном по ε приближении. Показано, что в радиальной диффузионной скорости появляются дополнительно к рассмотренным в [1] новые члены, обусловленные неоднородностью температуры и давления по сечению трубки, расширением газа и супербарнеттовской поправкой к диффузионной скорости. Основным является термодиффузионный член, определяемый уравнениями гидродинамики навье-стоксовского приближения. Остальные члены по отношению к нему порядка Kn^2 ($Kn=\langle l\rangle/R$ – число Кнудсена, $\langle l\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул). Полученное выражение для диффузионной скорости согласуется по знаку с экспериментом.

Рассмотрим установившееся ламинарное осесимметричное течение в цилиндрической трубке, вызванное разностью давлений на ее концах. Перепад давления обусловлен перепадом плотности числа молекул n ($\Delta p=kT_0\Delta n$). Температура газа на входе и на поверхности трубки постоянна и равна T_0. Концентрация смеси на входе однородна по сечению трубки и равна x_{10} ($x_1=n_1/n$, индекс 1 относится к более тяжелым молекулам).

В качестве исходной возьмем систему уравнений [2]

$$\nabla\mathbf{u}=-\mathbf{u}\nabla\ln\rho,\qquad \mathbf{u}\nabla x_1=-\frac{\rho}{n^2m_2}\boldsymbol{\nabla}(n_1\mathbf{V}) \tag{1}$$

$$\rho\left(u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr})-\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz} \tag{2}$$

$$\rho\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}-\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz} \tag{3}$$

$$\frac{3}{2}nk\mathbf{u}\nabla T=p\mathbf{u}\nabla\ln\rho-\nabla\mathbf{q}-\tau_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\tau_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} \tag{4}$$

$$-\tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial z}-\tau_{rz}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)-\frac{3}{2}kT\frac{m_1-m_2}{m_2}\nabla(n_1\mathbf{V})$$

$$p=\rho kT(x_1m_1+x_2m_2)^{-1} \tag{5}$$

Здесь (1) — уравнения неразрывности смеси и диффузии, (2), (3) — проекции уравнения импульса на осевое и радиальное направления, (4) — уравнение энергии, (5) — уравнение состояния смеси идеальных газов; u_r, u_z — физические составляющие гидродинамической скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{V}$ — диффузионная скорость тяжелой компоненты, $\tau_{\alpha\beta}$ — физические составляющие тензора вязких напряжений, остальные обозначения взяты из [2, 3]. Предполагается, что в $\tau_{\alpha\beta}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{V}$ включены наряду с обычными членами навье-стоксовского приближения также барнеттовские и супербарнеттовские члены [3, 4].

Предполагая малость изменения давления вдоль трубки (более точные условия будут получены дальше), можно считать $p^{-1}\partial p/\partial z$ локально постоянной и пренебречь в первом приближении производными от p более высокого порядка и нелинейными членами. При этом для скорости и давления получим уравнения, описывающие течение Пуазейля

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \tag{6}$$

Решение (6) запишем в виде

$$\begin{gathered} u_z=u^*(r)=U\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),\qquad U=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dz}\\ p=p^*(z)=p_0-\frac{\Delta p}{L}z \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь для скорости принято граничное условие прилипания, использование вместо него условия скольжения на окончательных результатах не отразится.

Найдем условия выполнения принятого приближения, используя полученные выражения для оценки пренебрегаемых членов в уравнениях движения. Характерное значение инерционного члена в (2) $\rho(u^*\partial u_z/\partial z+$ $+u_r\partial u^*/\partial r)\sim(u^*)^2\partial\rho/\partial z\sim\varepsilon\,\mathrm{Re}\,dp^*/dz$ ($\mathrm{Re}=\rho UR/\mu$ — число Рейнольдса). Условием малости инерционного члена по сравнению с членами, сохраняемыми в уравнении импульса, является

$$\varepsilon\,\mathrm{Re}\sim(\varepsilon Kn^{-1})^2\ll 1 \tag{8}$$

Наибольшие навье-стоксовские $(\mu\partial\nabla\mathbf{u}/\partial z)$, барнеттовские [3] и супербарнеттовские [4] члены из (2), не включенные в (6), имеют характерную величину $\varepsilon^2 d\bar{p}/dz$. Аналогично в (3) навье-стоксовские $(\mu\partial\nabla\mathbf{u}/\partial r)$ и барнеттовские члены имеют порядок $\varepsilon d\bar{p}/dz$, а правая часть уравнения неразрывности $\sim\varepsilon d\bar{u}/dr$. При выполнении условия (8) все они также малы.

Из уравнений диффузии и энергии, пренебрегая членами высшего порядка малости, получим

$$D_{12}\frac{nm_1}{\rho x_1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial x_1}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{9}$$

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-pu^*\frac{\partial\ln\rho}{\partial z}-\mu\left(\frac{du^*}{dr}\right)^2 \tag{10}$$

Здесь V_r — радиальная диффузионная скорость (из нее выделена часть, обусловленная $\partial x_1/\partial r$)

$$(11)\qquad V_z=\frac{\rho_2}{\rho}D_{12}(\alpha_p+\alpha_v)\frac{1}{p^*}\frac{dp^*}{dz},\qquad \alpha_p=\frac{n(m_1-m_2)}{\rho}$$

Здесь V_z — продольная бародиффузионная скорость [3, 5]. Не включенные в (10) члены имеют по отношению к удерживаемым порядок $\varepsilon\,\mathrm{Re}$ (конвективный член) или Kn^2 (продольная теплопроводность, барнеттовские и супербарнеттовские члены в q_r).

В принятом приближении, согласно (5), $\partial\ln\rho/\partial z=d\ln p^*/dz$, тогда из (10) получим

$$(12)\qquad \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{8\mu\lambda}\left(\frac{dp^*}{dz}\right)^2(R^2-r^2)r$$

Таким образом, имеет место неоднородное по сечению трубки распределение температуры и, следовательно, термодиффузия

$$(13)\qquad V_r=-\frac{\rho_2}{\rho T}D_{12}\alpha_T\frac{\partial T}{\partial r}$$

Из (12) видно, что $\partial T/\partial r>0$, кроме того, обычно $\alpha_T>0$ (хотя в некоторых смесях возможна перемена знака при изменении T и x_1). Например, для использованных в опытах смесей H_2-CO_2 и N_2-O_2 α_T равна 0,284 и 0,018 (при $T=293°$ K и $x_1\approx0{,}5$) [6]. Таким образом, термодиффузионная скорость направлена к оси трубки в согласии с экспериментом и, кроме того, вклад термодиффузии является преобладающим: его отношение к другим членам в V_r (см. (20)) порядка $\alpha_T Kn^{-2}\gg1$.

Отметим, что знак термодиффузионной скорости определяется первым членом в правой части (10). Этот член описывает охлаждение газа вследствие его расширения ($\nabla\mathbf{u}>0$) при движении по трубке и возникает из-за принятого предположения, что перепад давления обусловлен разностью плотности на концах трубки. Если принять, что перепад давления обусловлен разностью температур на концах трубки ($\Delta p=nk\Delta T$), то первый член в правой части (10) заменится на конвективный член $^3/_2nku_z\partial T/\partial z\approx{}^3/_2u\,dp/dz$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{3}{16\mu\lambda}\left(\frac{dp^*}{dz}\right)^2\left(R^2-\frac{r^2}{6}\right)r<0$$

и термодиффузионная скорость будет направлена от оси трубки.

В некоторых ситуациях (например, в смесях с малым значением α_T или в области температур, близких к температуре инверсии T^*, $\alpha_T(T^*)=0$) термодиффузионный вклад (13) становится малым. Возникает необходимость определения других членов $\sim\varepsilon^2$ в V_r.

Представим гидродинамические величины в виде

$$(14)\qquad \mathbf{u}=\mathbf{u}^*+\mathbf{u}',\qquad p=p^*+p'$$

где $\mathbf{u}^*$, p^* определяются (7), а штрихованные величины — поправки $\sim\varepsilon$. Дальнейший анализ проведем при упрощающем предположении $u_r'=0$. Некоторым оправданием этого может служить следующее: в задаче рассматривается участок развитого течения Пуазейля, так что входными эффектами можно пренебречь, и числа Рейнольдса потока существенно меньше критического значения. (Отметим, что термодиффузионное слагаемое было найдено без этого ограничения.)

Подставляя (14) в (1)–(3), получим ($u'\equiv u_z'$)

$$\frac{\partial u'}{\partial z}=-\frac{\bar{u}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\tag{15}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial r}=\frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2u'}{\partial r\,\partial z}+\frac{2}{3}[\xi_2]_1\frac{du^*}{dr}\frac{d^2u^*}{dr^2}-$$

$$-\frac{2}{3}[\xi_4]_1\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

где ξ_s — барнеттовские коэффициенты [3].

Используя (5), (7) и (11), из уравнений (15) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial r}=-\gamma_1\frac{1}{\bar{p}}\left(\frac{dp^*}{dz}\right)^2r\tag{16}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{3\mu^2}(x_1^{-1}\mu_1^2+x_2^{-1}\mu_2^2)-\frac{8}{15\mu\lambda}(x_1^{-1}\mu_1\lambda_1+x_2^{-1}\mu_2\lambda_2)$$

Согласно (16), имеет место неоднородное по сечению трубки распределение давления и, следовательно, бародиффузия [2]

$$V_r^{(1)}=\frac{\rho_2}{\rho p^*}D_{12}\alpha_p\frac{\partial p'}{\partial r}=-\gamma_1\alpha_p\frac{\rho_2}{\rho}D_{12}\left(\frac{1}{p^*}\frac{dp^*}{dz}\right)^2r\tag{17}$$

Анализ барнеттовской поправки к диффузионной скорости [3] показывает, что вклады в V_r возникают за счет членов, содержащих произведение градиентов давления и скорости (в [1] рассмотрен только этот вклад) и вторые производные от скорости $\partial^2u_z/\partial r\partial z$. Они могут быть записаны в виде (17) с γ_2 вместо $\gamma_1\alpha_p$,

$$\gamma_2=\frac{m_1m_2n^2\alpha_pD_{12}}{3\rho\mu}+\frac{\alpha_v}{6}\tag{18}$$

Как известно, метод Чепмена – Энскога решения уравнения Больцмана является операторным разложением с общим членом вида $\langle l\rangle^n\nabla^n$. Тогда с учетом тензорной размерности и выражений (7), (12) для градиентов гидродинамических величин можно ожидать, что в супербарнеттовском приближении в V_r войдут члены вида $\langle l\rangle^3\partial^3T/\partial r^3$ и $\langle l\rangle^3(\partial^2u_z/\partial r^2)\partial u_z/\partial r$, имеющие одинаковый порядок с бародиффузионным и барнеттовским вкладами.

Используя аналогичные соображения, можно показать, что вклады следующих за супербарнеттовским приближений имеют порядок ε^2 по отношению к (17).

Супербарнеттовская поправка к диффузионной скорости может быть вычислена с помощью функции распределения барнеттовского приближения аналогично тому, как вычисляется барнеттовская поправка на основе функции распределения первого приближения [3]. Затем из этого формального выражения для V_r выясняется, какие члены в барнеттовской поправке к функции распределения $f_i^{(2)}$ дают требуемый вклад в V_r. Необходимая часть $f_i^{(2)}$ определяется из системы интегральных уравнений [2, 3], для которых в случае смеси максвелловских молекул может быть построено точное решение. Вычисления, стандартные в кинетической теории, из-за громоздкости опущены.

Супербарнеттовский вклад в радиальную диффузионную скорость также имеет вид (17) с γ_3 вместо $\gamma_1\alpha_p$

$$\gamma_3=\frac{m_1m_2n^2p^2}{4\rho\mu}[(\theta_2^2R_{10}^{(2)}-\theta_1^2R_{10}^{(1)})-(\theta^2R_{02}^{(2)}-\theta_1^2R_{02}^{(1)})-\tag{19}$$

$$-(\theta_2 R_{03}^{(2)}-\theta_1 R_{03}^{(1)})]$$

$$R_{rl}^{(1)}=\frac{F_{rl}^{(1)}(n_2\lambda_{rl}^{(2)}+n_1\mu_{rl}^{(2)})-F_{rl}^{(2)}n_2\nu_{rl}}{(n_1\lambda_{rl}^{(1)}+n_2\mu_{rl}^{(1)})(n_2\lambda_{rl}^{(2)}+n_1\mu_{rl}^{(2)})-n_1n_2\nu_{rl}^2}$$

$$R_{10}^{(i)}=\frac{F_{10}^{(i)}}{n\mu_{10}^{(i)}}\qquad (r,l)=(0,2),\ (0,3)$$

$$F_{02}^{(i)}=\frac{2}{3}\frac{\mu_i}{\mu p_i}+\frac{16}{15}\frac{\lambda_i}{\lambda p_i},\qquad F_{03}^{(i)}=\frac{3}{5}\frac{\theta_i\mu_i}{\mu p_i}$$

$$F_{10}^{(i)}=\frac{2}{3p}\left(\frac{\mu_i}{\mu x_i}-1\right)-\frac{4}{3p}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda x_i}-1\right)\qquad (i=1,2)$$

Здесь $R_{rl}^{(2)}$ получаются из $R_{rl}^{(1)}$ взаимной заменой индексов 1 и 2; $\lambda_{rl}^{(i)}$, $\mu_{rl}^{(i)}$ и ν_{rl} — собственные значения линеаризованных операторов столкновений [7].

Отметим, что приведенное в [4] выражение для γ_3 является неполным, там, в частности, не учтен вклад от градиента T.

Объединяя (17), (18) и (19), получим

$$V_r=-\gamma D_{12}\left(\frac{1}{p^*}\frac{dp^*}{dz}\right)^2 r,\qquad \gamma=\frac{\rho_2}{\rho}(\alpha_p\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \tag{20}$$

Ввиду сложности γ определим знак V_r в двух частных случаях: смеси с сильно различающимися массами молекул и смеси с близкими значениями масс и диаметров молекул. При $m_1\gg m_2$ и $x_1\sim x_2$

$$\gamma=\frac{\rho_2 D_{12}}{\mu x_1^2}\left(\frac{1}{6}+\frac{x_1}{3x_2}\right) \tag{21}$$

При $m_1\approx m_2$, $s_1\approx s_2\approx s_{12}$ (s — эффективные молекулярные диаметры [2]), разлагая γ в ряд по малым параметрам, получаем (для максвелловских молекул)

$$\gamma=x_2\left[4.209\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+1.504\left(\frac{s_1^2-s_{12}^2}{s_{12}^2}x_1-\frac{s_2^2-s_{12}^2}{s_{12}^2}x_2\right)\right] \tag{22}$$

Таким образом, в обеих специальных смесях скорость V_r направлена к оси трубки.

Из уравнения диффузии (9) с учетом (11), (13) и (20) получим распределение концентрации по сечению трубки

$$x_1-x_{10}=\frac{\alpha_T x_{10}x_{20}}{32T_0\mu\lambda}\left(\frac{3}{4}R^4-R^2r^2+r^4\right)+ \tag{23}$$
$$+\frac{1}{4}\left[\gamma+\frac{\rho_2}{\rho}(\alpha_p+\alpha_v)\right]\left(\frac{1}{p^*}\frac{dp^*}{dz}\right)^2(R^2-r^2)$$

Характерное значение разделения смеси равно

$$x_1(0)-x_1(R)\sim\varepsilon^2 O[\max(\alpha_T Kn^{-2},\ 1)]$$

Автор благодарит Г. Е. Скворцова, привлекшего его внимание к рассмотренной задаче, и Ю. Н. Григорьева за обсуждение результатов.

Поступила 14 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Annis B. K.* Stress induced diffusion in monatomic gases and gas suspensions. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 2.
2. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Шавалиев М. Ш.* Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
4. *Шавалиев М. Ш.* Некоторые результаты по барнеттовскому и супербарнеттовскому приближению. Тр. 4-й Всес. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М., Изд. отдел. ЦАГИ, 1977.
5. *Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А.* Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3.
6. *Sirovich L.* Mixtures of Maxwell molecules. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 12.
7. *Грю К. Э., Иббс Т. Л.* Термическая диффузия в газах. М., Гостехиздат, 1956.