МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1979

УДК 533.6.011.55

СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ НИЖНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ КУСОЧНО-ПЛОСКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ

С. М. ТЕР-МИНАСЯНЦ

(Москва)

Рассматриваемое крыло имеет любое конечное число изломов своей плоскости с линиями излома, пересекающимися в точке излома передней кромки. Этим в данной работе обобщается работа автора [1] по обтеканию нижней поверхности плоского крыла под конечным углом атаки, с конечным углом скольжения и сверхзвуковыми передними кромками. В работе [1] не были приведены расчеты. Частный случай обтекания без скольжения в той же постановке позже был рассмотрен в работе [2]. Однако она содержит ошибки, указанные в конце данной работы. Приведенные в [2] расчеты не верны.

В упомянутых работах течение газа предполагается возмущением однородного потока за плоским косым скачком уплотнения. Систематическое рассмотрение таких течений содержится в [3]. Здесь и в работе [1] используется и обобщается представление линеаризованных законов сохранения на ударном фронте как условий краевой задачи для аналитической функции комплексного переменного, полученное в [4, 5].

Представлены расчеты распределения давления по размаху для ряда различных режимов обтекания и сравнение коэффициентов давления в середине крыла с численным решением [1], изложенным частично в [6].

1. Описание течения. Изучается сверхзвуковое обтекание крыла, составленного из произвольных плоских угловых элементов, соединенных между собой под малыми углами друг к другу вдоль прямых линий, пересекающихся в одной точке. Свободные кромки крайних угловых элементов образуют изломанную переднюю кромку, к которой предполагается присоединенным пространственный скачок уплотнения. Параметры определяемого течения отличаются малыми величинами от параметров обтекания со скольжением клина конечного угла раствора α_1, называемого ниже основным крылом. При заданных его углах атаки α и стреловидности χ (в плоскости крыла между перпендикуляром к передней кромке и проекцией вектора скорости набегающего потока) угол α_1 и угол скольжения β (между вектором скорости набегающего потока и передней кромкой) находятся по формулам

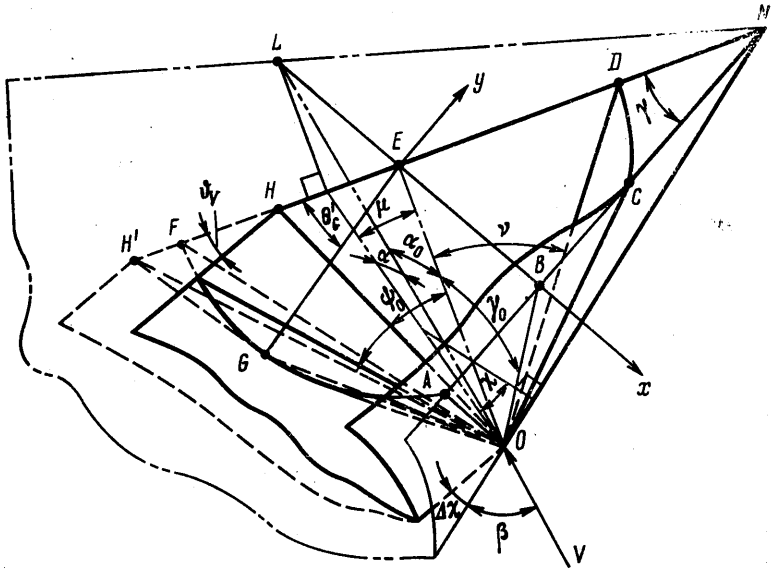
$$\beta=\arccos(\cos\alpha\sin\chi),\quad \alpha_1=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\sec\chi) \tag{1.1}$$

Во избежание загромождений сначала можно предположить, что крыло имеет лишь одну линию излома. Схема обтекания такого крыла дана на фиг. 1, где основное крыло показано совпадающим с одним из полукрыльев исходного. Возникающее коническое течение достаточно определить в плоскости $ABCNDF$, перпендикулярной вектору скорости у основного крыла и рассекающей конус возмущений с вершиной в точке O и осью OE по кругу единичного радиуса. Она называется ниже рабочей плоскостью.

[1] Лапыгин В. И. Обтекание и оптимальная форма V-образного крыла в сверхзвуковом потоке. Канд. дис., МГУ, 1973.

Линия излома OH, проходящая внутри упомянутого конуса, называется ниже дозвуковой, а проходящая вне его OH' — сверхзвуковой. Через последнюю проходит плоскость слабого скачка сжатия или разряжения, касающаяся конуса возмущений вдоль линии OG и ограничивающая область сверхзвукового обтекания малого излома стенки. (Построения, относящиеся к сверхзвуковой линии излома, на фиг. 1 выполнены штриховой линией; присоединенный к передней кромке искривленный скачок уплотнения показан одним и тем же для обоих случаев линии излома.)

Могут представиться случаи, когда линия OG должна была бы быть на той части конуса, которая срезана скачком уплотнения. Тогда этот сла-



Фиг. 1

бый скачок, пересекаясь, взаимодействует со скачком уплотнения. Анализ таких взаимодействий приведен в книге [3]; в случае конечных интенсивностей обоих скачков некоторые случаи представлены численным решением [7]. Результатом взаимодействия здесь опять будет слабый скачок (отраженный от сильного), плоскость которого будет касаться конуса возмущений. Но может также случиться, что линия касания OG попадет на ту часть конуса, которая в данном случае срезана плоскостью крыла. Слабый скачок при этом отразится от этой плоскости и либо коснется конуса возмущений, либо будет отражаться от сильного скачка и т. д.

Обтекание основного крыла характеризуют кроме α, β, χ и α_1 следующие параметры [1, 8]:

число M невозмущенного потока $M_\infty = V_\infty / a_\infty$, где V_∞ — его скорость, а a_∞ — скорость звука в нем.

Угол γ_1 наклона скачка уплотнения в плоскости, перпендикулярной передней кромке (определяется через M_∞, α_1 и β по формулам работы [9]).

Угол поворота потока в плоскости крыла μ и угол между нормалью к передней кромке и вектором скорости у крыла χ_0

$$(1.2)\qquad \mu = \frac{\pi}{2} - \chi - \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos\gamma_1 \operatorname{tg}\beta}{\cos(\gamma_1 - \alpha_1)}\right], \qquad \chi_0 = \chi + \mu$$

Углы γ и γ_0 между линиями пересечения плоскостей основного крыла и скачка уплотнения с рабочей плоскостью и с плоскостью, проходящей через векторы скорости набегающего потока и потока у крыла (и перпендикулярной скачку уплотнения)

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\gamma_1-\alpha_1)\sin\chi_0,\quad \operatorname{tg}\gamma_0=\operatorname{ctg}\chi_0\sin\gamma \tag{1.3}$$

Угол α_0 между упомянутыми векторами скоростей

$$\alpha_0=\arcsin(\sin\beta\sin\gamma_1)-\gamma_0 \tag{1.4}$$

Число M потока у основного крыла и угол ν полураствора конуса возмущений

$$M_1=M_\infty\frac{a_\infty}{a_1}\sqrt{1-\sin^2\beta\left[1-\frac{\cos^2\gamma_1}{\cos^2(\gamma_1-\alpha_1)}\right]},\quad \sin\nu=\frac{1}{M_1} \tag{1.5}$$

Отличие крыла от основного определяют углы ψ и $\psi_0=\chi_0-\psi$, составляемые линией излома с перпендикуляром к передней кромке основного крыла и с вектором скорости возле него, углы $\Delta\chi_\pm$ излома передней кромки (справа и слева от точки O, если смотреть со стороны рабочей плоскости; показанному на фиг. 1 углу $\Delta\chi$ соответствует индекс минус), угол ϑ_V излома плоскости крыла.

Новые значения углов атаки α_V и скольжения β_V частей крыла, повернутых на угол ϑ_V относительно линии излома, определяются выражениями

$$\sin\alpha_V=\sin\alpha\cos\vartheta_V+\cos\alpha\sin\vartheta_V\sin(\psi-\chi) \tag{1.6}$$

$$\cos\beta_V=[\sin\vartheta_V\sin\alpha+\cos\vartheta_V\cos\alpha\sin(\chi-\psi)]\times$$
$$\times\cos(\psi-\Delta\chi_\pm)-\cos\alpha\cos(\psi-\chi)\sin(\psi-\Delta\chi_\pm) \tag{1.7}$$

Скачок уплотнения у основного крыла движется со скоростью U по газу перед своим фронтом (область ∞), вызывая за ним (область 1) движение газа со скоростью V. Связь между ними и выражения для давления p_1, плотности ρ_1 и скорости звука a_1 в удобной форме даны в работе [10] формулами (1.2).

2. Краевая задача. Система прямоугольных автомодельных координат x, y вводится в рабочей плоскости $ABCNDEF$, имея началом точку E (см. фиг. 1) и ось y — параллельной плоскости скачка у основного крыла. Их можно считать полученными из физических x', y', z' с началом в полюсе O и осью z' вдоль линии OE по формулам $x=x'/z'\operatorname{tg}\nu$, $y=y'/z'\operatorname{tg}\nu$.

Искривленный участок AC ударного фронта представляется уравнением $x\operatorname{tg}\nu=\operatorname{tg}\gamma_0+f(y)\sec\gamma_0$, где f — малое искривление в плоскости, нормальной к фронту скачка у основного крыла. Вдоль этого участка для безразмерных возмущений компонент скорости $u=u'/a_1\cos\nu$, $v=v'/a_1\cos\nu$ и давления $p=p'/\rho_1a_1^2$ (u', v' и p' — размерные возмущения) получаются выражения

$$u=\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_\infty}{a_1}\frac{1}{M_c^2}\frac{\cos\gamma_0}{\cos\nu}[(M_c^2+1)M_e\cos\gamma_0-$$
$$-(M_c^2-1)M_c\sin\gamma_0](f-yf') \tag{2.1}$$

$$v=-\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_\infty}{a_1}\frac{M_c^2-1}{M_c^2}\frac{1}{\sin\nu}f',\quad p=\frac{4}{\varkappa+1}\frac{p_\infty}{p_1}M_cM_e\cos\gamma_0(f-yf')$$

$$M_c=M_\infty\sin(\alpha_0+\gamma_0)=U/a_\infty,\quad M_e=M_\infty\cos(\alpha_0+\gamma_0)$$

Здесь $\varkappa$ — показатель политропы.

Уравнения пространственного стационарного движения газа для величин u, v, p в переменных x, y преобразуются в систему [11]

$$x\frac{\partial p}{\partial x}+y\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\qquad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x},\tag{2.2}$$

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}$$

Исключение функций u и v, переход к полярным координатам $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ и преобразование Буземана $r=2R/(1+R^2)$ приводят к уравнению Лапласа для функции p [11]. Из всех элементов контура области при этом изменяет очертания лишь участок ударного фронта AC. Его образом оказывается окружность $2R\cos\theta=m(1+R^2)$, ортогонально пересекающаяся с окружностью $R=1$. Вдоль этого элемента границы краевые условия для функции p можно записать в виде [11]

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big/\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{mA_0\operatorname{tg}\theta-B_0\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1-m^2\sec^2\theta}},\qquad m=\operatorname{tg}\gamma_0\operatorname{ctg}\nu\tag{2.3}$$

$$A_0=A\frac{\cos\gamma_0}{\cos\nu}\left[1-\frac{M_c^2-1}{M_c^2+1}\frac{M_c}{M_e}\operatorname{tg}\gamma_0\right],\qquad B_0=\frac{B}{M_e}\frac{a_1}{a_\infty}\frac{\sec\gamma_0}{\sin\nu}\tag{2.4}$$

Здесь n и s — координаты вдоль внешней нормали и касательной к контуру, величины A и B даны формулами (3.1) работы [10].

Для записи краевого условия на стенке оси x, y поворачиваются относительно начала координат до совпадения оси y с нормалью к плоскости основного крыла. Пусть новые оси и проекции вектора скорости будут x_1, y_1 и u_1, v_1.

В случае дозвуковой линии излома ($M_н<1$) при переходе через нее размерная величина скачка нормальной к крылу составляющей скорости в линейном приближении равна

$$a_1\cos\nu v_1=\vartheta_V M_1 a_1\sin\psi_0\vartheta(x_1-M_н),\qquad M_н=\operatorname{ctg}\nu\operatorname{tg}\psi_0\tag{2.5}$$

где $\vartheta=1$ при $x_1\geqslant M_н$ и $\vartheta=0$ при $x_1<M_н$

Таким образом

$$\partial v_1/\partial x_1=\vartheta_V M_1\sin\psi_0\sec\nu\delta(x_1-M_н)$$

где $\delta(x_1-M_н)$ — дельта-функция Дирака.

В силу инвариантности системы (2.2) относительно поворота осей последнее ее уравнение позволяет получить отсюда условие для давления, которое после преобразования Буземана и подстановки значения $M_н$ приобретает вид

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\vartheta_V M_1^2\sin^2\psi_0\delta(R-R_н)}{\sqrt{1-M_1^2\sin^2\psi_0}},\quad R_н=\frac{1-\sqrt{1-M_н^2}}{M_н}$$

В случае сверхзвуковой линии излома ($M_н\geqslant 1$) возмущение давления, вызванное обтеканием угла, равно

$$p=\frac{p'}{\rho_1 a_1^2}=\frac{\vartheta_V M_1\sin\psi_0}{\sqrt{M_1^2\sin^2\psi_0-1}}$$

и, следовательно, вдоль одной из дуг Маха CD или AF

$$\frac{\partial p}{\partial\theta'}=\frac{\vartheta_V M_1^2\sin^2\psi_0}{\sqrt{M_1^2\sin^2\psi_0-1}}\delta(\theta'-\theta_G')$$

$$\sec\theta_G'=\operatorname{ctg}\nu\operatorname{tg}\psi_0,\qquad \theta=-\gamma\pm\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right) \tag{2.6}$$

причем верхний знак соответствует дуге CD, нижний — дуге AF.

Образ области неоднородного потока в плоскости $\zeta=R\exp i\theta$ конформным преобразованием $z=z(\zeta)$ переводится в прямоугольник $0<\sigma<l=-\frac{1}{2}\ln q$, $0<\tau<\pi$ плоскости $z=\sigma+i\tau$; функция $z(\zeta)$ и выражение величины q даются формулами (3.1) и (3.3) работы [10], в которых величина M в данном случае имеет выражение

$$M=\operatorname{tg}\gamma_0\operatorname{ctg}\nu\operatorname{cosec}\gamma \tag{2.7}$$

Ударному фронту соответствует правая ($\sigma=l$), а стенке — левая ($\sigma=0$) стороны прямоугольника. Координаты образов точек G и H получают выражения

$$\sigma_G=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(\theta_G-\theta_2)}{1-\cos(\theta_G-\theta_1)},\qquad \tau_G=0,\pi$$

$$\sigma_H=0,\qquad \tau_H=\arccos\frac{1+MM_H}{M+M_H}$$

входящие сюда величины даны формулами (2.5), (2.6), (2.7).

Пусть теперь крыло имеет m ($i=1, 2,\ldots, m$) дозвуковых и n ($j=1, 2,\ldots, n$) сверхзвуковых линий излома (предполагается, что это второе назначение символов m, n, i, j не вызовет недоразумений). Допускается такая совокупность ϑ_{Vi}, ϑ_{Vj}, что каждое из них и алгебраическая сумма любого их числа, относящегося к последовательно расположенным линиям излома, есть величина малая.

В плоскости z краевое условие на всем контуре прямоугольника может быть записано единым соотношением

$$P\frac{\partial p}{\partial\sigma}-Q\frac{\partial p}{\partial\tau}=S \tag{2.8}$$

причем на образце ударного фронта, при $\sigma=l$, $0<\tau<\pi$ $S=0$ и $p/Q=b(\tau)$, где $b(\tau)$ получается подстановкой обращения преобразования $z=z(\zeta)$ при $\sigma=l$ в правую часть (2.3) и дается формулой (3.5) работы [10], в которой в данном случае $m_0=\sec\gamma\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\nu\operatorname{tg}^2\gamma_0}$. На остальных участках контура прямоугольника — образах стенки и маховских дуг — задается производная $\partial p/\partial\sigma$, т. е. $P=1$, $Q=0$ и для выбранного числа линий излома

$$S=M_1^2\sum_{i=1}^{m}\vartheta_{Vi}\sin\psi_{0i}\frac{\delta(\tau-\tau_{Hi})}{\sqrt{1-M_1^2\sin^2\psi_{0i}}}+ \tag{2.9}$$

$$+M_1^2\sum_{j=1}^{n}\vartheta_{Vj}\sin\psi_{0j}\frac{\delta(\sigma-\sigma_{Gj})}{\sqrt{M_1^2\sin^2\psi_0-1}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} s_i\delta(\tau-\tau_{Hi})+\sum_{j=1}^{n} s_j\delta(\sigma-\sigma_{Gj})$$

$$\psi_{0i}=\chi_0-\psi_i \tag{2.10}$$

Углы ψ_{0i} и ψ_{0j} сносятся с поверхности кусочно-плоского крыла на основное и измеряются в его плоскости.

Должны быть удовлетворены еще два нормировочных условия, первое из которых получается из соотношений (2.1) при помощи уравнений (2.2), а второе есть просто формула Ньютона — Лейбница

$$\int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{d\tau}{y(\tau)}=\frac{2}{\varkappa+1}\frac{M_c^2-1}{M_c^2}\frac{a_\infty}{a_1}\frac{\gamma''-\gamma'}{B_0\sin\nu}\cos\gamma=c_1, \tag{2.12}$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \tau}d\tau=p_+-p_-=c_2$$

Величины γ'', γ', p_+, p_- и ниже еще и v_+ и v_- — возмущения угла γ и значения функций p и v, относящиеся к однородным потокам, примыкающим к неоднородному, соответственно вдоль дуг Маха CD и FA или их частей, имеющих своими концами точки A и C. Величины p_+, p_- определены формулами (2.1), в которых $f'=\operatorname{tg}\nu\cos\gamma_0\operatorname{tg}\gamma'$ в точке A и $f'=$ $=\operatorname{tg}\nu\cos\gamma_0\operatorname{tg}\gamma''$ в точке C.

Если обтекание крыла таково, что скачки давления, вызванные сверхзвуковыми линиями излома, не пересекаются со скачком уплотнения, присоединенным к передней кромке, то правые части нормировочных условий (2.12) нетрудно представить точно

$$c_1=(v_+-v_-)/B_0,\qquad c_2=(p_{1+}-p_{1-})/\varkappa p_1 \tag{2.13}$$

Размерные величины $p_{1\pm}$ находятся по формулам для однородных потоков у скользящих клиньев. В случае одной дозвуковой линии излома (независимо от числа сверхзвуковых)

$$v_\pm=M_1[(\sin\psi_{0\pm}\cos\vartheta_{V\pm}\cos\psi_0-\cos\psi_{0\pm}\sin\psi_0)\cos\gamma+ \tag{2.14}$$
$$+\sin\psi_0\sin\vartheta_{V\pm}\sin\gamma]\sec\nu a_{1\pm}/a_1$$

В случае любого конечного их числа следует найти углы между плоскими частями крыла, примыкающими с периферийных сторон к другим частям вдоль крайних дозвуковых линий излома, и основным крылом. Это определит некоторое крыло с одной дозвуковой линией излома, для которого правые части (2.13), (2.14) совпадают с таковыми для рассматриваемого. Указанные углы определяются только геометрическими параметрами крыла элементарным путем; формулы здесь опущены. Входящие в формулу (2.14) величины $\psi_{0\pm}$ относятся к полукрыльям, рассматриваемым каждое как независимое скользящее крыло.

Соотношения (2.8)—(2.14) дают постановку неоднородной краевой задачи Гильберта для функции

$$\Gamma=\frac{\partial p}{\partial \sigma}-i\frac{\partial p}{\partial \tau} \tag{2.15}$$

аналитической в прямоугольнике $0<\sigma<l$, $0<\tau<\pi$ [12, 13].

3. Решение для давления. Решение однородной задачи, когда величина S в краевом условии (2.8) на всем контуре равна нулю, соответствует плоскому крылу. Оно приведено в работе [1] с некоторым отличием обозначений и в п. 4 работы [10] для задачи дифракции. Его можно записать в виде $\Gamma_0=c\Phi(z)(\omega(z)-\xi_0(z_0))$. Решение изучаемой здесь задачи представляется функцией

$$\Gamma(z)=\Phi(z)\Biggl[c(\omega(z)-\xi_0(z_0))-\\ -(\omega^2+1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_{0i}}{\omega-\xi_{Hi}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{0j}}{\omega-\xi_{Gj}}\right)\Biggr] \tag{3.1}$$

Индексы Hi и Gj у величины ξ соответствуют до- и сверхзвуковым линиям излома. Введение обозначения $\Phi_0(\xi)=-i\Phi(\xi)$ позволяет представить действительные константы c_{0i} и c_{0j} в виде

$$c_{0i}=\frac{s_i|\xi_\tau'(\tau_{Hi})|}{\pi\Phi_0(\xi_{Hi})(\xi_{Hi}^2+1)},\qquad c_{0j}=\frac{s_j|\xi_\sigma'(\sigma_{Gj})|}{\pi\Phi_0(\xi_{Gj})(\xi_{Gj}^2+1)}$$

$$\xi_\tau'=\frac{2K}{\pi}\frac{k'}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(\tau,q)\vartheta_+(\tau,q)}{\vartheta_3^2(\tau,q)},$$

$$\xi_\sigma'=\frac{2K}{\pi}\frac{k'}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(\sigma,q')\vartheta_2(\sigma,q')}{\vartheta_3^2(\sigma,q')}$$

Здесь $\vartheta_1-\vartheta_4$ — эллиптические тэта-функции, а K, k, k', q, q' — характеризующие их параметры [14]. Функции $\Phi(z)=\Lambda(z)L_1(z)L_2(z)$, $\omega(z)=-\xi+i\eta$ в произвольной точке прямоугольной области и на участках границы DF, FA и AC в тех же обозначениях, что и здесь, представлены в п. 4 работы [10]. На участке CD функции $\Lambda(z)$ и $L_1(z)$ те же, что и на участке FA, функции $\omega(z)$ — другого знака, а функция $L_2(z)$ является обратной величиной.

Контурные значения решения (3.1) имеют вид

$$\Gamma^-(z)=\Phi^-(z)\Biggl[c(\xi(z)-\xi_0(z_0))-(\xi^2+1)\times\\ \times\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_{0i}}{\xi-\xi_{Hi}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{0j}}{\xi-\xi_{Gj}}\right)\Biggr]+\sum_{i=1}^{m}s_i\delta(\tau-\tau_{Hi})+\\ +\sum_{j=1}^{n}s_j\delta(\sigma-\sigma_{Gj}) \tag{3.2}$$

Для констант c и $\xi_0(z_0)$ из условий (2.12) получается система уравнений, решение которой дается формулами (5.5) работы [10], если четыре первых из входящих туда интегралов I_1-I_6 считать имеющими те же выражения (следует лишь опустить множитель $\sqrt{1-m^2}$ перед знаками интегралов I_1 и I_2), а два последних заменить суммами

$$I_5=\sum_{i=1}^{m}\int_0^\pi\frac{\Psi(\tau)\vartheta_2(\tau,q)(\xi^2+1)}{\xi(l+i\tau)-\xi(i\tau_{Hi})}d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\Psi(\tau)\vartheta_2(\tau,q)(\xi^2+1)}{\xi(l+i\tau)-\xi(\sigma_{Gj})}d\tau$$

$$I_6=\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{\pi}\frac{\Psi(\tau)\vartheta_2(\tau,q)(\xi^2+1)}{\xi(l+i\tau)-\xi(i\tau_{Hi})}\frac{d\tau}{y(\tau)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\Psi(\tau)\vartheta_2(\tau,q)(\xi^2+1)}{\xi(l+i\tau)-\xi(\sigma_{Gj})}\frac{d\tau}{y(\tau)}$$

Формула (3.2) позволяет написать выражение производной $\partial p/\partial\tau$ вдоль образа размаха крыла

$$\frac{\partial p}{\partial\tau}=\Phi_0(i\tau)\Bigg[c(\xi(i\tau)-\xi_0(z_0))-(\xi^2+1)\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_{0i}}{\xi(i\tau)-\xi(i\tau_{Hi})}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{0j}}{\xi(i\tau)-\xi(\sigma_{Gj})}\Bigg)\Bigg]$$

Видно, что над дозвуковыми линиями излома возмущение давления p имеет логарифмические особенности.

Физическая координата r произвольной точки участка поверхности крыла, возле которого поток неоднороден, вычисляется по формуле $r=|(M\cos\tau-1)/(M-\cos\tau)|$ и располагается справа от точки E (см. фиг. 1), если $\tau>\arccos M^{-1}$, и слева от нее в противоположном случае.

4. Форма скачка уплотнения. Разрешение второго из соотношений (2.1) относительно f', дифференцирование его по y приводят к дифференциальному уравнению для функции f. Решение в исходных физических координатах имеет вид

$$f(y)=[y-\operatorname{ctg}(\chi_0+\Delta\chi_+)\cos\gamma]\gamma'\cos\gamma_0-$$

$$-\frac{\varkappa+1}{2M_c}\frac{a_1}{a_\infty}\frac{B\sin\nu}{1-M_c^{-2}}\int_{0}^{\tau(y)}[y-t(\lambda)]\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{t(\lambda)}$$

Здесь зависимости $t(\lambda)$ и $y(\tau)$ тождественны. Функция $\partial p(l+i\tau)/\partial\tau=-\operatorname{Im}\Gamma^-(l+i\tau)$ дана формулой (3.2). Константы первого слагаемого отвечают правому полукрылу.

5. Численные результаты. Для оценки качества решения и иллюстрации возможностей метода были проведены расчеты распределения давления вдоль нижней поверхности размаха для ряда вариантов плоского крыла и крыла с одной линией излома.

Давление определялось по одной из формул

$$(5.1)\qquad p=p_D-\int_{\pi}^{\tau(r)}(\partial p/\partial\tau)d\tau,\quad p=p_F+\int_{0}^{\tau(r)}(\partial p/\partial\tau)d\tau$$

где индексы указывают на точки (см. фиг. 1). Все необходимые значения давления и скоростей, относящиеся к однородным потокам, вычислялись точно.

В таблице приведено сравнение полученных коэффициентов C_p в средних точках размаха (II) с данными расчетов, относящихся к работе [6] (I) при численном решении нелинейной задачи для 18 вариантов симметричного обтекания симметричного плоского крыла с указанием их.

№	M_∞	α	$\Delta\chi_\pm$	C_p		№	M_∞	α	$\Delta\chi_\pm$	C_p	
				I	II					I	II
1	6.8	6°	60°	0.0411	0.0407	10	10	15°	45°21′	0.167	0.167
2	6.8	10°	60°	0.0882	0.0865	11	10	21°	45°21′	0.305	0.304
3	10^3	8°32′	45°	0.0512	0.0518	12	10	3°	60°	0.0129	0.0129
4	10^3	11°51′	45°	0.0978	0.0986	13	10	9°	60°	0.0663	0.0660
5	10^3	15°07′	45°	0.156	0.158	14	10	15°	60°	0.161	0.160
6	4	18°51′	32°	0.309	0.309	15	10	21°	60°	0.290	0.290
7	4	11°49′	59°2′	0.137	0.137	16	4	5°	50°	0.0470	0.0465
8	10	3°	45°21′	0.0134	0.0135	17	4	10°	50°	0.114	0.113
9	10	9°	45°21′	0.0686	0.0686	18	4	15°	50°	0,206	0,202

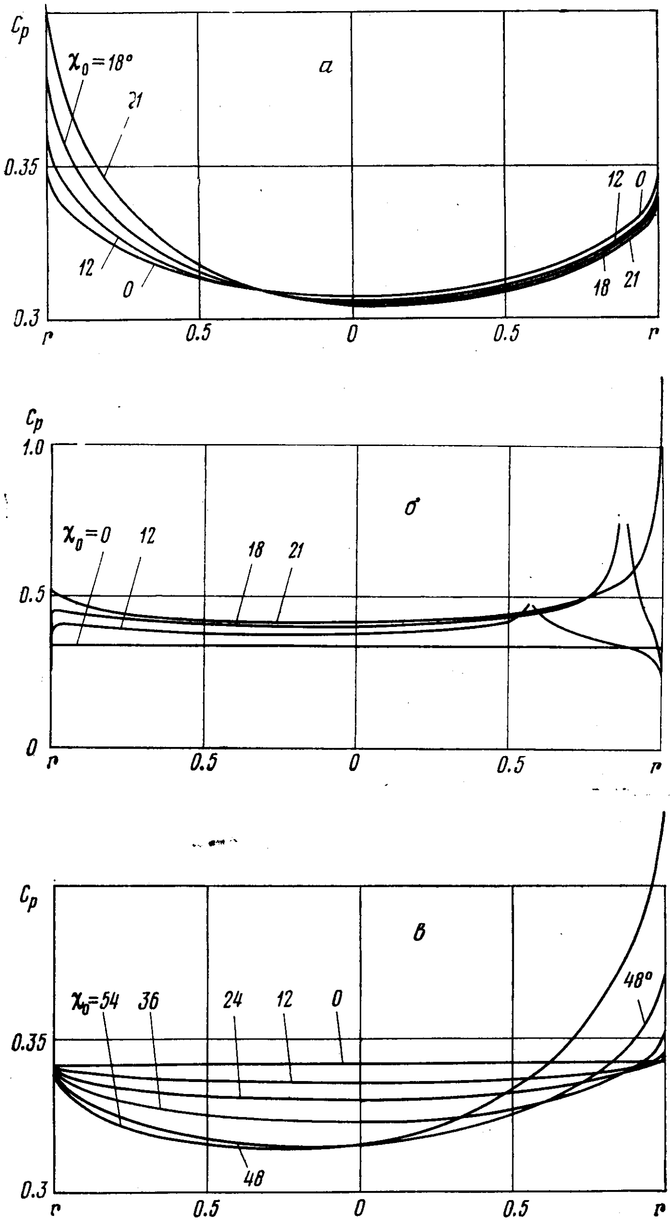
Имеющиеся небольшие расхождения не указывают на бо́льшую степень близости параметров относящихся к ним потоков к каким-либо критическим значениям, чем в случаях других вариантов.

Сравнение с расчетами [15] по линейной задаче о симметричном неавтомодельном обтекании крыла указывает на совпадение при малых $\Delta\chi_\pm$ (равных в радианах примерно ± 0.01 и даже ± 0.1), однако при $\Delta\chi_\pm = \pm 30°$, например в случаях $M_\infty = 2$, $\alpha = 13°11'$ и $M_\infty = 5$, $\alpha = 30°28'$, давление в середине крыла в единицах, использованных в работе [15], получается равным 0.409 и 0.755, а по данным настоящей работы – 0.547 и 0.912. Результаты работы [15] нельзя, таким образом, рассматривать как обобщающие решение, представленное в [1] и здесь. Это сравнение иллюстрирует роль уточнения нормировочных условий.

Однако даже при полном совпадении результатов в средних точках, отличие в той или иной мере проявляется в областях крыла, обтекаемых периферийными участками неоднородных потоков, и состоит прежде всего в том, что эти потоки, согласно численному решению нелинейной задачи, обтекают несколько более широкую зону крыла по размаху, чем дает диаметр сечения рабочей плоскостью конуса возмущений. Попытка уточнения может состоять в построении двух конусов возмущений с вершинами в той же точке, которые будут соответствовать однородным потокам, примыкающим с боков к неоднородному, и в растяжении построенной кривой давления до границы области неоднородного потока, даваемой обоими этими конусами. Такой прием составляет элемент метода растяжения координат [16], примененный в [2]. Для достижения этой цели на каждом из приведенных графиков можно соответственно сжать масштаб оси абсцисс.

На фиг. 2 приведены кривые C_p по размаху крыла (в сечении основного крыла, перпендикулярном вектору скорости у него) для некоторых типов течений. Каждый из них, включая в себя симметричное обтекание, имеет какое-то качество, лишающее его свойств симметрии. Кривые *а* отвечают обтеканию плоского симметричного крыла, охарактеризованного в варианте 6 (см. таблицу) при наличии скольжения ($\chi = 0$, 12, 18, 21°); кривые *б* – того же крыла с дополнительным осложнением – углами поперечного V $\vartheta_{V\pm} = \pm 10°$ в каждом из указанных вариантов. Кривые *в* соответствуют $M_\infty = 4$, $\alpha = 18°51'$ (как в варианте 6), они показывают влияние изменения угла среза правой кромки от значения $\Delta\chi_+ = 0$ до значения $\Delta\chi_+ = 54°$ с шагом 6°; при отсутствии среза левой кромки $\Delta\chi_- = 0$.

6. О работе Гуи [2]. В этой работе проведено рассмотрение частного симметричного случая обтекания плоского треугольного крыла точно в той же постановке, в которой решение этой задачи изложено раньше в работе [1] и в данной работе. В силу единственности решения должно было бы быть абсолютное совпадение расчетов данной работы с имеющимися в работе [2], тем более что автор ее укрепляет уверенность в их точности, говоря о полном слиянии в срединной части крыла трех его вариантов с численным решением нелинейной задачи [17].



Фиг. 2

Но совпадения не получается. Всесторонние проверки[1] обнаруживают в работе [2] две ошибки. Первая из них есть случайная техническая ошибка: в формуле (17) этой работы в числителе выражения для величины C пропущен множитель 2. Используя ошибочную формулу, автор делает вторую, уже не случайную ошибку. Он определяет давление по его производной вдоль размаха не тем единственно пра-

[1] В частности, был проведен расчет решения Лайтхилла задачи дифракции [5], так как ей соответствует та же краевая задача, что и в работе [2]. Расчет показал, что ошибка в работе [5], указанная в примечании переводчика (С. С. Григорян) к русскому изданию обзорной статьи Лудлофа [18], есть лишь описка в тексте, не повлиявшая на вычисления. Расчеты Лайтхилла верны.

вильным путем, который в настоящей работе выражен формулой (5.1) (какой-либо из них), а выводит некую «стыковочную» формулу, на основании которой давление в середине размаха крыла берет равным лишь интегральному члену (5.1), непрерывно переводя его вдоль размаха к значению, даваемому внеинтегральным членом в периферийном однородном потоке. Таким путем получается случайное совпадение с численным решением [17] (решения [6] и [17] при этом совпадают) в случае двух вариантов (17 и 18 таблицы). Другие варианты работы [2] с результатами настоящей работы, естественно, не совпадают.

Расчеты по формулам работы [2] показывают, однако, что после устранения обеих указанных ошибок совпадение полностью достигается.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Лапыгину, предоставившему большое число вариантов его численного решения, и Л. Е. Пекуровскому за помощь при проведении расчетов.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Минасянц С. М.* Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
2. *Hui W. H.* Supersonic and hypersonic flow with attached shock waves over delta wings. Proc. Roy. Soc. A., 1971, vol. 325. No. 1561.
3. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
4. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc. London, A., 1949, vol. 198, No. 1055.
5. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. 2. Proc. Roy. Soc. London, A., 1950, vol. 200, No. 1063.
6. *Лапыгин В. И.* Расчет стационарного обтекания *V*-образного крыла методом установления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, 3.
7. *Росляков Г. С.* Взаимодействие плоских скачков одного направления. В сб.: Численные методы в газовой динамике. Вып. 4. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965.
8. *Бабаев Д. А.* Численное решение задачи обтекания нижней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
9. *Briggs J. L.* Comment on Calculation of Oblique Shock Waves. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 5.
10. *Тер-Минасянц С. М.* Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1971, т. 35, № 2.
11. *Chester W.* The diffraction and reflection of shock waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 1, *Честер.* Дифракция и отражение ударных волн. «Механика», Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит., 1956, № 3
12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
14. *Уиттекер Э. Т. и Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
15. *Фоллэ М. И.* Линейная задача для треугольных и *V*-образных крыльев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
16. *Lighthill M. J.* A technique for randering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag., 1949, vol. 40, No. 311.
17. *Воскресенский Г. П.* Численное решение задачи обтекания произвольной поверхности треугольного крыла в области сжатия сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
18. *Лудлофф Г. Ф.* Аэродинамика взрывных волн. В сб.: Проблемы механики. М., Изд-во иностр. лит., 1955.