

ПУЛЬСИРУЮЩИЙ РЕЖИМ ПРИ НАТЕКАНИИ СТАЦИОНАРНОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА НА ПРЕГРАДУ

Я. А. ВАГРАМЕНКО, В. Н. ЛЯХОВ, В. М. УСТИНОВ

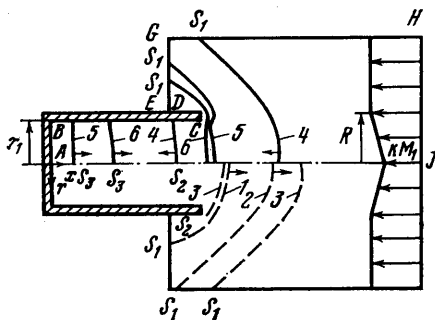
(Москва)

Проведено математическое моделирование пульсирующего режима обтекания цилиндрической полости стационарным неоднородным сверхзвуковым потоком. Система уравнений для невязкого нетеплопроводного газа решена численным методом, основанным на двухшаговой разностной схеме 2-го порядка аппроксимации. Данный метод на каждом шаге по времени позволяет рассчитывать сразу все поле течения, что дает возможность следить за развитием нестационарного течения, в данном случае — пульсирующего.

Подробно исследована картина течения на пульсирующем режиме обтекания. Пульсации давления в полости вызваны поочередным прохождением в ней ударных волн и волн разрежения и носят нелинейный характер. Исследовано влияние исходных параметров на характеристики пульсирующего течения и даны некоторые оценочные соотношения.

При натекании струи на преграду в некоторых случаях происходит потеря устойчивости течения и реализуется пульсирующий режим обтекания [1-3]. Существует несколько гипотез происхождения и механизма неустойчивости. На основании некоторых из них построены математические модели явления и сделаны попытки рассчитать параметры пульсаций [4, 5]. Однако полученные результаты противоречивы и не вносят ясности в решение данной проблемы. В последнее время делаются попытки численного исследования пульсирующего режима обтекания тел с помощью методов установления.

Эти методы с использованием различных разностных схем сквозного счета применялись и ранее для расчета взаимодействий струй с преградами. Однако на режимах, когда в экспериментах наблюдается сильная неустойчивость, в расчетах нестационарного течения не получалось [6]. По-видимому, использованные численные методы не учитывали эффекты, которые приводят к возникновению неустойчивости. В работе [7] методом крупных частиц с помощью моно-



Фиг. 1

тонных разностных схем 1-го порядка точности автору удалось получить установившийся колебательный процесс, близкий к зарегистрированному в эксперименте при натекании струи на плоскую ограниченную преграду.

В данной работе модифицированным методом Лакса — Вендроффа проведено численное моделирование пульсирующего режима при натекании неоднородного сверхзвукового потока на цилиндрическую полость. Уста-

новлены неизвестные ранее закономерности течения в пульсирующем режиме и даны некоторые оценочные соотношения возникающих при этом колебаний газа в полости.

1. Схема натекания стационарного неоднородного сверхзвукового потока на цилиндрическую полость показана на фиг. 1. Неоднородность потока задается линейным распределением скорости u вдоль радиуса

$$(1.1) \quad u = \begin{cases} (1-k)u_1 r/R + ku_1, & 0 \leq r \leq R \\ u_1, & r > R \end{cases}$$

где k — постоянный коэффициент.

Давление p_1 и плотность ρ_1 задаются постоянными по сечению набегающего потока. Индекс 1 относится к параметрам газа в набегающем потоке.

Рассматриваемое течение определяется следующими безразмерными газодинамическими и геометрическими параметрами: $M_1 = u_1/a_1$ — число Маха ($a_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ — скорость звука); $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты Пуассона, h — глубина полости, l — толщина стенок полости, R — радиус неоднородности, k — коэффициент неоднородности; геометрические размеры h и l отнесены к диаметру полости d , а R — к радиусу полости $r_1 = 0.5d$.

Параметры задачи варьируются в следующих пределах: $M_1 = 2.0-3.0$; $k = 0.5-1.0$; $R = 0.0-1.0$; $h = 0.0-3.1$. Толщина стенки l полости во всех расчетах остается постоянной и равной 0.1, а показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. В зависимости от значения исходных параметров задачи наблюдается либо стационарный режим обтекания преграды, либо нестационарный (пульсирующий), хотя набегающий поток задается стационарным.

Система уравнений и разностный метод. Течение описывается системой уравнений невязкого, нетеплопроводного газа в цилиндрической системе координат

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} + \mathbf{C} = 0$$

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{\omega v}{r} \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e + p \end{vmatrix}$$

Здесь $e = \rho(\epsilon + 0.5(u^2 + v^2))$, $\omega = 0$ для плоского случая, $\omega = 1$ — для осесимметричного; давление p и плотность ρ отнесены к параметрам набегающего потока p_1 и ρ_1 ; проекции вектора скорости u и v на направления цилиндрических координат x и r отнесены к величине $\sqrt{p_1/\rho_1}$; линейные размеры — к диаметру полости d ; время t — к $d/\sqrt{p_1/\rho_1}$; начало координат помещено в точку A ; через e и ϵ обозначены полная энергия единицы объема и внутренняя энергия единицы массы.

Система уравнений (1.2) замыкается уравнением состояния идеального газа: $p = \rho e (\gamma - 1)$.

Уравнения (1.2) аппроксимируются со вторым порядком явной двухшаговой разностной схемой [8, 9]. Вместо искусственной вязкости используется оператор сглаживания [10], который вносит ошибку 3-го порядка малости на гладких решениях, следовательно, порядок аппроксимации остается вторым. Для выбора постоянного коэффициента C в операторе сглаживания проводится несколько расчетов с уменьшающимися значе-

ниями C , пока не нарушится устойчивый счет. При этом оказывается, что решение мало зависит от величины C . Так, изменение величины C на 100% приводит к изменению решения на 10%, т. е. на порядок меньше, и то в основном районе сильных разрывов. В данных расчетах коэффициент C брался равным 0.6.

Для обеспечения устойчивости счета шаг по времени выбирается из условия $\Delta t = Cg \min(\Delta x/|u|+a, \Delta r/(|v|+a))$, которое проверяется во всех точках счетного поля. Число Куранта Cg выбирается по возможности достаточно большим, чтобы сократить время счета. В данных расчетах число Cg принималось равным 0.8. Проверка показала, что при выбранном таким образом Δt решение практически совпадает с решением при $\Delta t/2$ (с точностью 2–3%), т. е. не зависит от Δt . Уменьшение Δt в два раза достигалось как изменением числа Cg , так и уменьшением размеров ячейки.

Данный разностный метод позволяет вести вычисления, не обращая внимания на разрывы газодинамических параметров. Ударные волны при этом проявляются в виде узких переходных зон (3–4 интервала разностной сетки) с быстрым изменением параметров течения. Контактные и тангенциальные поверхности, которые имели бы место в идеальной жидкости, проявляются в виде зон смещения, увеличивающих свои размеры с увеличением времени или расстояния.

В момент времени $t=0$ задаются следующие начальные условия: вне полости — параметры набегающего потока, в полости — параметры торможения за прямым скачком. Полученное решение не зависит от начальных данных.

Граничные условия. Расчетная область выделяется с помощью контура $ABCDEFGHIJ$ (фиг. 1), причем линии EG, GH являются «свободными» поверхностями, линии AB, BC, CD, DE — твердыми поверхностями, AJ — осью симметрии. На оси AJ должны выполняться условия симметрии, что алгоритмически обеспечивается введением дополнительного слоя точек вне расчетной области и пересылкой туда параметров из ближайших внутренних точек счетного поля. Нормальная к оси составляющая скорости v при этом переносится со знаком минус. На твердых границах должно выполняться условие непротекания — равенство нулю нормальной к стенке составляющей скорости. В алгоритме это обеспечивается аналогично условию на оси. На «свободных» поверхностях задается условие $\partial f/\partial x_n = 0$. Такое условие достаточно строго выполняется в случае сверхзвукового потока, когда поток сносит возмущение к границам. На границе HJ задаются параметры набегающего потока, которые остаются в процессе счета постоянными.

Положение «свободных» границ определяется опытным путем. Проводится несколько одинаковых расчетов с различным положением границ и выбираются такие расстояния до «свободных» границ, чтобы решение не зависело от положения границ.

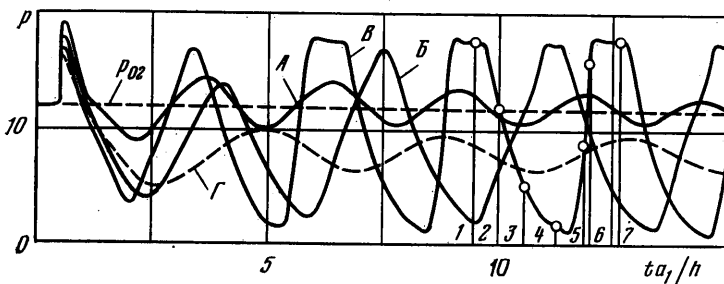
2. В момент времени $t=0$ у среза полости происходит распад разрыва и образуются ударная волна, контактный разрыв и пара слабых разрывов, ограничивающих волну разрежения. Ударная волна движется навстречу набегающему потоку, а по газу в полости бежит волна разрежения. В результате в полости устанавливается колебательный процесс, вызванный поочередным прохождением в ней волн разрежения и сжатия.

В случае натекания на полость однородного ($k=1$) сверхзвукового потока возникающий в начальный момент колебательный процесс из-за наличия «схемной» вязкости затухает и устанавливается стационарная картина течения. Этому случаю на фиг. 2 соответствует кривая A , изображающая зависимость давления на дне полости от времени для $M_1=3.0$,

$k=1.0$, $h=0.96$. Видно, что с течением времени колебания затухают и давление выходит на значение, соответствующее давлению торможения за прямым скачком

$$p_{02} = p_1 (M_1^2 \gamma / \mu)^{1/(\gamma-1)} / (\mu M_1^2 - \nu)^{1/(\gamma-1)}, \quad \mu = 2\gamma / (\gamma + 1), \\ \nu = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$$

При наличии неоднородности в набегающем потоке происходит потеря устойчивости течения. Возникающие в начальный момент колебания не затухают, как в случае с однородным потоком, а наоборот, происходит



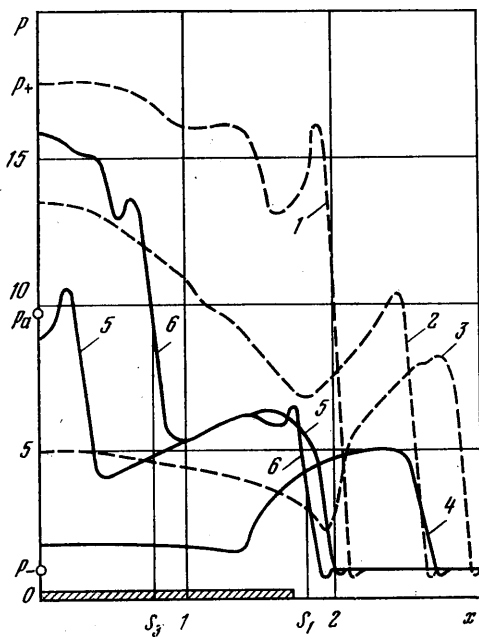
Фиг. 2

раскачка. Амплитуда колебаний давления на дне полости (фиг. 2, кривая *Б* для случая $M_1=3.0$, $k=0.8$, $R=1.0$, $h=0.96$) с течением времени увеличивается и выходит на постоянное значение, в результате чего устанавливается пульсирующее течение. Пульсации давления на дне полости приобретают характер нелинейных незатухающих колебаний, амплитуда Δp и частота ν которых не зависят от начальных данных, а определяются параметрами задачи. Здесь $\Delta p = 0.5(p_+ - p_-)$, где p_+ и p_- — максимальное и минимальное значения давления, достигаемые на дне полости при колебаниях.

Следует отметить, что описанное пульсирующее течение, при котором наблюдаются нелинейные колебания давления, реализуется в случае полостей, глубина которых больше некоторой предельной глубины. Ниже будет показано, что такой пульсирующий режим реализуется только при $h \geq 1$.

Анализ полученных в работе результатов показывает, что течение в полости за время одного периода колебания можно разделить на две фазы. В первой фазе поток втекает внутрь полости и сжимает находящийся в ней газ, во второй фазе происходит истечение сжатого газа из полости и столкновение его с набегающим внешним потоком. На фиг. 3 представлены распределения давления газа вдоль оси потока в моменты времени, указанные цифрами 1–7 на фиг. 2 (см. кривую *В* для случая $M_1=3.0$, $k=0.8$, $R=1.0$, $h=1.73$). Эти моменты времени охватывают один период колебания. На фиг. 1 в те же моменты времени изображены положения ударных волн и стрелками показаны направления их движения. Положения ударных волн определяются по серединам участков больших градиентов параметров. В качестве примера на фиг. 3 для кривой, соответствующей моменту времени 6, положения этих волн указаны буквами S_1 и S_2 на оси x . Моменты времени 1, 2, 3 соответствуют фазе расширения, моменты времени 4, 5, 6 — фазе сжатия. На фиг. 1 и 3 кривые, относящиеся к фазам расширения и сжатия, проведены соответственно пунктирными и сплошными линиями. Рассмотрим подробнее каждую фазу.

Фаза расширения. В момент времени 1 газ в полости сжат до давления p_+ , причем это давление больше полного давления p_{02} за прямым скачком. Газ начинает вытекать из полости. Образующаяся ударная волна S_1 движется навстречу потоку (момент 2). Внутри полости в этот момент движется волна разрежения, уменьшая там давление. Вытекающий газ разгоняется и при данных режимах, как показывают расчеты, достигает сверхзвуковой скорости на выходе из полости. При этом образуется ударная волна торможения S_2 . Таким образом, в момент времени 3 перед полостью имеются две ударные волны S_1 и S_2 , между которыми газ течет навстречу друг другу и растекается в стороны. Система волн S_1 и S_2 останавливается в том месте, где скачки давления и плотности на них удовлетворяют ударной адиабате. Наступает квазистационарное истечение газа из полости и столкновение его с набегающим потоком. Если взять полость достаточно большой глубины, то система волн S_1 и S_2 будет оставаться в стационарном положении до тех пор, пока отраженная от дна волна разрежения не достигнет каждой из них и не изменит соотношение параметров, после чего они начинают смещаться в сторону полости. Волна разрежения отражается от открытого конца полости волной сжатия и газ начинает втекать в полость.



Фиг. 3

Внутри полости давление газа перед волной S_2 некоторое время продолжает уменьшаться (момент времени 4) и достигает величины p_- при достижении волной S_2 дна полости. Как показывают расчеты, $p_- \approx 1$. По достижению давления p_2/p_- за и перед фронтом волны S_2 в момент ее падения на дно можно оценить давление p_a за отраженной ударной волной S_3 [11]

$$(2.1) \quad p_a = p_2 \frac{(3\gamma - 1) p_2 / p_- - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1) p_2 / p_- + (\gamma + 1)}$$

Значение p_a , вычисленное по формуле (2.1), показано на фиг. 3. Хорошее совпадение с результатом численного счета указывает на правильность моделирования процесса. Отраженная от дна ударная волна S_3 движется навстречу втекающему в полость потоку газа и останавливает его, повышая при этом его давление (моменты времени 5, 6). Вследствие того, что параметры втекающего потока непостоянны, давление газа за ударной волной S_3 увеличивается от p_a до p_+ . Когда волна S_3 достигает выхода из полости, цикл завершается. При этом ударная волна S_1 , как видно из расчетов, приближается к срезу полости и в зависимости от параметров задачи либо входит в полость и сливается с волной S_3 в одну волну, либо, сблизившись на некоторое расстояние, опять начинает двигаться обратно навстречу набегающему потоку.

Для оценки максимальной величины давления, достигаемого на дне полости при колебаниях, примем следующие допущения:

- течение в полости считается одномерным;
- взаимодействие ударных волн с контактными разрывами не рассматривается;
- неоднородный набегающий поток заменяется некоторым фиктивным

однородным потоком с числом $M=M_*$, где $M_*^2=2 \int_0^{r_1} ru^2 dr/a_1^2 r_1^2$, распределение скорости $u(r)$ определяется выражением (1.1).

Предположим, что волны S_1 и S_3 не сливаются в одну ударную волну в конце фазы сжатия. Тогда волна S_1 , перед тем как повернуть назад, в какой-то момент останавливается. Число Маха потока M_2 и давление p_2 за остановившейся волной определим из соотношений на прямом скачке

$$M_2^2 = [2 + (\gamma - 1)M_*^2] / [2\gamma M_*^2 - (\gamma - 1)], \quad p_2 = p_1 (\mu M_*^2 - \nu)$$

Используя полученные значения M_2 и p_2 и учитывая, что за отраженной волной S_3 газ покоится, оценим значение давления на дне полости [12]

$$(2.2) \quad p_{03} = p_2 \left(1 + \frac{\Phi}{2} + \sqrt{\Phi \left(\mu + \frac{\Phi}{4} \right)} \right),$$

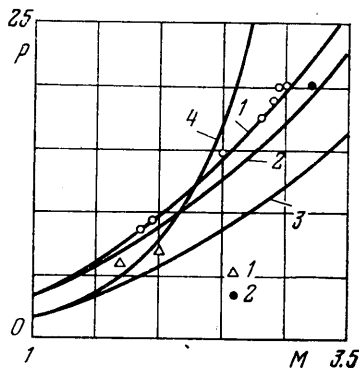
$$\Phi = M_2^2 \gamma^2 / \mu$$

Если волна S_1 сливается с волной S_3 , то в этом случае на выходе из полости имеется одна ударная волна, движущаяся навстречу потоку. Давление покоящегося за волной газа оценим по формуле

$$(2.3) \quad p_{03} = p_1 \left(1 + \frac{\Phi}{2} + \sqrt{\Phi \left(\mu + \frac{\Phi}{4} \right)} \right), \quad \Phi = M_1^2 \gamma^2 / \mu$$

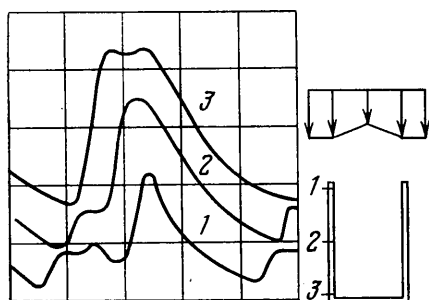
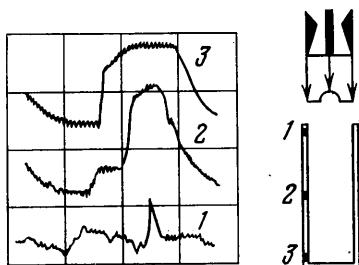
На фиг. 4 кривые 1 и 2, построенные по формулам (2.2) и (2.3), изображают зависимости давления p_{03} от числа M для этих двух случаев. Точками обозначены значения давления p_+ на дне полости, полученные в результате численного счета. Видно, что формула (2.2) дает наилучшее приближение. Таким образом, амплитуду колебаний давления можно оценить по формуле $\Delta p = 0.5(p_{03} - 1)$, где p_{03} находится из соотношения (2.2). Для сравнения здесь же нанесены зависимости полного давления за прямым скачком p_{02} (кривая 3) и давления торможения набегающего потока p_{01} (кривая 4) от числа M . Видно, что максимальное давление p_+ , достигаемое при колебаниях на дне полости, при всех значениях числа M превышает полное давление p_{02} за прямым скачком, а при $M \lesssim 2.3$ даже оказывается больше, чем давление торможения набегающего потока.

Исследование влияния параметров задачи на характеристики пульсаций подтверждает правильность понимания описанного выше процесса колебаний. Варианты расчетов с различными параметрами задачи приведены в таблице. Варианты 1–9 соответствуют исследованию влияния глубины полости. При этом обнаруживаются три характерных диапазона глубин.



Фиг. 4

1. При $h \geq 1$ амплитуда колебаний давления, как и следовало ожидать, не зависит от глубины полости. Действительно, для полости большой глубины (т. е. такой, когда в фазе сжатия волна сжатия при движении в полости успевает трансформироваться в ударную волну) амплитуда колебаний определяется только числом M_* и не зависит от других параметров. Колебания давления носят нелинейный характер.



Фиг. 5

2. При $0.5 < h < 1$ пульсации давления приобретают вид гармонических колебаний (фиг. 2, кривая Г). Это объясняется тем, что при малых глубинах полости волна сжатия не успевает трансформироваться в ударную волну и по полости поочередно распространяются волны сжатия и разрежения.

3. При $0 < h < 0.5$ колебания в полости затухают и наблюдается стационарная картина обтекания.

Такое разбиение на диапазоны по глубине полости сделано для определенных параметров задачи ($M=3.0$, $k=0.8$, $R=1.0$), при других значениях параметров границы диапазонов могут измениться.

Период колебаний определяется глубиной полости и скоростью распространения в ней волн. Для неглубоких полостей в акустике используют эффективную глубину $h_{\text{eff}} = h + 0.4d$. Если принять

скорость распространения ударных волн и волн сжатия и разрежения одинаковой и равной скорости звука a_{01} заторможенного потока и использовать эффективную глубину полости h_{eff} , то за характерную частоту процесса следует взять частоту

$$\nu_0 = a_{01} / (4h_{\text{eff}}) = a_1 / (4h_{\text{eff}} \sqrt{\tau})$$

где $\tau(M_*)$ — отношение температуры в потоке к температуре торможения. Действительно, безразмерная частота колебаний ν/ν_0 , как видно из табли-

№	h	R	k	M_1	M_*	p_{max}	p_{min}	$\frac{p_{\text{os}}}{(2.2)}$	ν/ν_0
1	0.0					8.0	8.0		0.0
2	0.19					8.0	8.0		0.0
3	0.58					9.4	66.6		0.85
4	0.96					17.8	1.6		0.79
5	1.54	1.00	0.8	3.0	2.79	17.8	1.2	17.1	0.80
6	1.56					17.4	1.0		0.81
7	1.73					18.0	1.1		0.80
8	2.30					16.8	1.2		0.81
9	3.10					17.0	1.2		0.86
10			1.0		3.0	12.0	12.0		0.0
11		0.08	0.8		3.0	20.1	1.6	19.4	0.85
12	1.73	1.00	0.9		2.89	18.6	2.0	18.4	0.91
13		0.08	0.8	2.5	2.50	14.6	1.0	14.0	0.86
14		0.61	0.8	2.0	1.95	9.2	0.5	9.2	0.80
15		1.00	0.8	2.0	1.86	8.5	0.5	8.5	0.83

цы, практически не зависит от глубины полости. Изменение числа M потока в пределах 3.0—1.86 (варианты 10—15) приводит к изменению амплитуды колебаний давления согласно формуле (2.2) и почти не влияет на частоту ν/ν_0 процесса.

Рассматриваемое в данной работе пульсирующее обтекание полости неоднородным потоком по характеру подобно пульсирующему процессу, возникающему при натекании на полость струи, где неоднородность обеспечивается либо механически, введением цилиндрического стержня по оси в сопло [2], либо за счет нерасчетности истечения из сопла [1, 3]. Для сравнения на фиг. 5 приведены осциллограммы датчиков давления, расположенных на дне, в середине и у выхода полости в зависимости от времени при натекании на нее струи [2], а также численные «осциллограммы» в сходственных точках, полученные в данных расчетах. Видно, что поведение давления качественно не отличается одно от другого. В точках, расположенных посередине полости, кривые имеют две ступеньки: в первой давление повышается за падающей ударной волной S_2 , во второй — за отраженной S_3 . Кроме того, безразмерные частоты ν/ν_0 для потока и струи примерно совпадают и равны 0.87. Следовательно, можно видеть, что процессы колебаний при обтекании полости на пульсирующем режиме потоком и струей идентичны друг другу. Поэтому и в случае со струей максимальное давление, реализуемое в полости при колебаниях, можно оценивать по формуле (2.2). При этом эта оценка, по-видимому, будет оценкой по максимуму — экспериментальные точки 1 и 2, заимствованные из работ [2, 3], как видно из фиг. 4, лежат несколько ниже расчетной кривой.

Таким образом, совпадение расчетных давлений p_+ со значениями, вычисленными по формуле (2.3), а также соответствие описанного процесса колебаний реальному позволяют утверждать, что данный метод расчета правильно моделирует пульсирующий режим обтекания.

Поступила 9 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубков А. Г., Козьменко Б. К., Остапенко В. А., Сологчин А. В. О взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской ограниченной преградой. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1972, вып. 3, № 13.
2. Brocher E., Maresce C., Bournaï M.-H. Fluid dynamics of the resonance tube. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, No. 2.
3. Куццов В. М., Остроухова С. И., Филиппов К. Н. Пульсации давления и нагрев газа при втекании сверхзвуковой струи в цилиндрическую полость. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
4. Morch K. A. A theory for the mode of operation of the Hartmann air jet generator. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, No. 4. (Рус. перев.: Мерц К. А. Теория струйного генератора Гартмана. Период. сб. перев. иностр. статей, 1965, № 2).
5. Глазнев В. Н., Демин В. С. Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду. ПМТФ, 1976, № 6.
6. Дубинская Н. В., Иванов М. Я. Численное исследование стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской преградой, расположенной перпендикулярно к ее оси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
7. Набережнова Г. В. Расчет нестационарного взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской преградой методом «крупных частиц». Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1899.
8. Каширский А. В., Коровин Ю. В., Чудов Л. А. Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб.: Вычисл. методы и программирование, вып. 19. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
9. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 6.
10. Лязов В. Н. Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб.: Числ. методы механики сплошной среды, т. 5, № 3. Новосибирск, 1974.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
12. Лязов В. Н. Нестационарные нагрузки при дифракции ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.