

О МОДЕЛИРОВАНИИ ИСТОЧНИКОМ ТОНКОЙ СТРУЙКИ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ТЕЛА

Н. Б. СОТИНА, В. В. ФОМИНЫХ

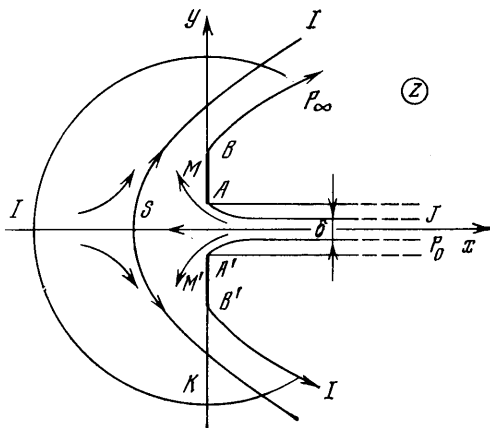
(Москва)

В работе дано точное аналитическое решение следующей плоской гидродинамической задачи. Безграничный поток идеальной несжимаемой жидкости струйно обтекает пластинку BB' , расположенную перпендикулярно вектору скорости потока в бесконечности. Давление на свободной границе P_∞ равно давлению в потоке. Из отверстия, находящегося в центре пластинки, навстречу потоку из каверны с давлением P_0 вытекает струйка с расходом Q . В результате решения получено, что при фиксированной ширине отверстия значения Q , допускаемые данной схемой, ограничены. В предельных случаях при $Q=0$ получается течение Чаплыгина с застойной зоной впереди [1], а при $Q=Q_{\max}$ — струя, вытекающая из каверны с давлением P_0 в каверну с давлением P_∞ . При изменении Q в этом интервале суммарный коэффициент сопротивления, рассматриваемый как сопротивление пластинки и камеры, из которой вытекает струйка, принимает в некоторой точке минимальное значение.

Если ширина отверстия стремится к длине пластинки, получается задача о соударении двух струй, если ширина отверстия стремится к нулю ($Q \neq 0$), получается задача о струйном обтекании пластинки с источником. В работе показано, что замена струйки источником дает хорошее приближение как в смысле силовых характеристик, так и в смысле поведения свободных линий тока.

Для решения задачи область течения z (фиг. 1) отобразим на прямоугольник в плоскости u (таким образом, чтобы точке B соответствовало $u=0$; точке $A \rightarrow u=\pi\tau/2$; точке $I \rightarrow u=\pi/2$) при помощи функции

$$(1) \quad z = \frac{1}{v_\infty} \int_0^u e^{-i\theta} \frac{dW}{du} du + i \frac{l}{2}$$



Фиг. 1

Здесь l — длина пластинки, $\zeta = \ln v/v_0 - i\theta$, v_∞ — скорость потока, W — комплексный потенциал. Как нетрудно установить, аналитическая функция dW/du является эллиптической и в соответствии с общей теорией [2] она допускает следующие представления

$$(2) \quad \frac{dW}{du} = M' \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_2(u) \vartheta_2(u-is) \vartheta_2(u+is)}{\vartheta_2^3(u) \vartheta_3(u)} = \\ = A \ln' \vartheta_3(u) - A \ln' \vartheta_2(u) + B \ln''' \vartheta_2(u) + C$$

Для определения коэффициентов имеем следующие условия. Коэффициент A равен вычету функции dW/du при $u=\pi/2+\pi\tau/2$ и, следовательно

но, $A=Q/\pi$. $Q=v_0\delta$, v_0 — скорость, δ — ширина струйки в бесконечности. При $u=0$ $dW/du=0$, поскольку в точке B нарушается конформность отображения. Из этого условия получим $C=0$. Кроме того, $dW/du=0$ в точке $S(is+\pi/2)$, являющейся образом критической точки на плоскости u . Отсюда

$$A \ln' \vartheta_1 \left(is + \frac{\pi}{2} \right) - A \ln' \vartheta_2 \left(is + \frac{\pi}{2} \right) + B \ln''' \vartheta_2 \left(is + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Учитывая соотношения $\vartheta_3(u_1+\pi/2)=\vartheta_4(u_1)$, $\vartheta_2(u_1+\pi/2)=-\vartheta_1(u_1)$, получим

$$(3) \quad B = \left[\ln' \frac{\vartheta_1(is)}{\vartheta_4(is)} / \ln''' \vartheta_1(is) \right] A = kA$$

причем входящие в эти формулы функции могут быть представимы рядами

$$\begin{aligned} \ln \vartheta_1(is) &= \operatorname{ctg} is + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{4q^{2h} \sin 2is}{1-2q^{2h} \cos 2is + q^{4h}} \\ \ln' \vartheta_4(is) &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{4q^{2h-1} \sin 2is}{1-2q^{2h-1} \cos 2is + q^{4h-2}} \\ \ln''' \vartheta_1(is) &= \frac{2 \operatorname{ctg} is}{\sin^2 is} + 16(\sin 2is) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{2h} q^{2h}}{1-2q^{2h} \cos 2is + q^{4h}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6q^{4h} \cos 2is}{(1-2q^{2h} \cos 2is + q^{4h})^2} + \frac{8q^{6h} \sin^2 2is}{(1-2q^{2h} \cos 2is + q^{4h})^3} \right], \quad q=e^{i\pi\tau} \end{aligned}$$

Таким образом, формула (2) примет вид

$$(4) \quad \frac{dW}{du} = \frac{Q}{\pi} [\ln' \vartheta_3(u) - \ln' \vartheta_2(u) + k \ln''' \vartheta_2(u)]$$

Аналогично эллиптическая функция $d\xi/du$ имеет представление

$$\frac{d\xi}{du} = A_1 \ln' \vartheta_2(u-is) - A_1 \ln' \vartheta_2(u+is) + B_1$$

или

$$\xi = A_1 \ln \vartheta_2(u-is) - A_1 \ln \vartheta_2(u+is) + B_1 u + C_1$$

Для нахождения коэффициентов имеем следующие условия. При $u=0$ $\xi=-i\pi/2$. Учитывая, что $\vartheta_2(u)$ — функция четная, получим $C_1=-i\pi/2$. При $u=\pi\tau/2$ $\xi=p-i\pi/2$, где $p=\ln(v_0/v_\infty)$. Воспользовавшись соотношениями $\vartheta_2\left(is \pm \frac{\pi\tau}{2}\right) = q^{-1/2} e^{\pm s} \vartheta_3(is)$, найдем $p = -2sA_1 + B_1\pi\tau/2$. При $u=\pi/2$

$\xi=0$. Учитывая соотношения $\vartheta_2(\pi/2 \mp is) = \pm \vartheta_1(is)$, найдем $B_1 = i(1-2A_1)$. При $u=\pi\tau/2 + \pi/2$ $\xi=p-i\pi$. Поскольку

$$\vartheta_2\left(is - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\tau}{2}\right) = -iq^{-1/2} e^{-s} \vartheta_4(is)$$

$$\vartheta_2\left(is + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}\right) = -iq^{-1/2} e^s \vartheta_4(is)$$

получим $p-i\pi/2 = -2sA_1 + B_1(\pi/2 + \pi\tau/2)$.

Таким образом, из этих условий следует $A_1=1$; $B_1=-i$

$$(5) \quad p = -2s + \pi\tau/2i$$

$$(6) \quad e^{\tau} = -i \frac{\vartheta_2(u-is)}{\vartheta_2(u+is)} e^{-iu}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} z &= \frac{Qi}{v_{\infty}\pi} \int_0^u \frac{\vartheta_2(u+is)}{\vartheta_2(u-is)} e^{iu} \left[\ln' \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_2(u)} + k \ln''' \vartheta_2(u) \right] du + i \frac{l}{2} = \\ &= \frac{Qi}{v_{\infty}\pi} \int_0^u \Phi(u) du + i \frac{l}{2} \end{aligned}$$

или

$$(7) \quad \frac{z}{l} = \frac{Q'i}{\pi} \int_0^u \Phi(u) du + \frac{i}{2}; \quad Q' = \frac{Q}{v_{\infty}l} = e^p \frac{\delta}{l}$$

Причем для входящих в подынтегральное выражение эта-функций справедливы разложения

$$\vartheta_2(u, \tau) \equiv \vartheta_2(u) = 2q^{1/4} \cos u + 2q^{9/4} \cos 3u + \dots$$

$$\ln' \vartheta_3(u) = -4 \sin 2u \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1+2q^{2k-1} \cos 2u + q^{4k-2}}$$

$$(8) \quad \ln' \vartheta_2(u) = -\operatorname{tg} u - 4 \sin 2u \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+2q^{2k} \cos 2u + q^{4k}}$$

$$\begin{aligned} \ln''' \vartheta_2(u) &= -\frac{2 \operatorname{tg} u}{\cos^2 u} + 16 \sin 2u \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q^{2k}}{1+2q^{2k} \cos 2u + q^{4k}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6q^{4k} \cos 2u}{(1+2q^{2k} \cos 2u + q^{4k})^2} - \frac{8q^{6k} \sin^2 2u}{(1+2q^{2k} \cos 2u + q^{4k})^3} \right] \end{aligned}$$

Для определения постоянных p , τ и s по заданным Q' и h/l , где h — ширина отверстия, кроме соотношения (5) имеем следующие геометрические условия:

$$(9) \quad \frac{h}{l} = 1 + \frac{2Q'}{\pi} \int_0^{\pi\tau/2} \Phi(u) du$$

$$(10) \quad \frac{h}{l} - \frac{\delta}{l} = \frac{2Q'}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{\pi/2+\pi\tau/2}^{\pi\tau/2} \Phi(u) du \right]$$

Для удобства вычислений последнего интеграла следует воспользоваться формулами приведения

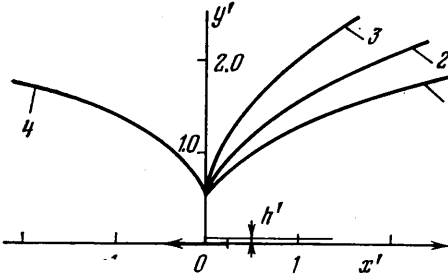
$$\vartheta_2 \left(u + \frac{\pi\tau}{2} \right) = i\lambda \vartheta_m(u), \quad l = \{1, 4\}; \quad m = \{4, 1\}$$

$$\vartheta_k \left(u + \frac{\pi\tau}{2} \right) = \lambda \vartheta_s(u), \quad k = \{2, 3\}; \quad s = \{3, 2\}$$

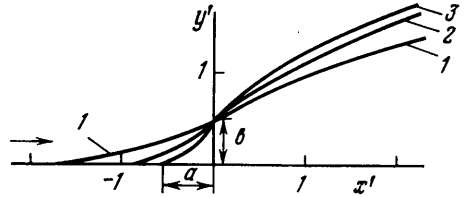
$$\lambda = q^{-1/4} e^{-iu}$$

Из формулы (6) можно определить координаты точки $M(m)$, лежащей на границе, в которой нарушается конформность отображения $\zeta = \zeta(u)$

$$(11) \quad \ln' (\vartheta_2(m-is) / \vartheta_2(m+is)) = i$$

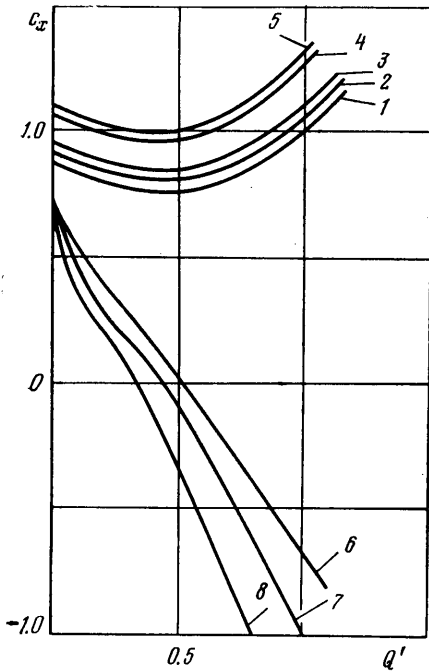


Фиг. 2



Фиг. 3

В зависимости от Q и h/l возможны различные значения m . Если m заключено в пределах $0 < m < \pi\tau/2$, то на пластинке в некоторой точке M скорость достигает минимального значения. Если $0 < m < \pi/2$, то скорость на пластинке меняется монотонно, однако на свободной границе появляется точка перегиба. Если $\pi\tau/2 < m < \pi/2 + \pi\tau/2$, то точка перегиба появляется на границе струи. В соответствии с этим область изменения ζ для верхней половины течения имеет четыре возможных вида. Заметим, что в случае $v_0 > v_\infty$ ($p > 0$), как видно из формулы (5), параметр s заключен в интервале от 0 до $\pi\tau/4i$, а в случае $v_0 < v_\infty$ изменяется в пределах $\pi\tau/4i < s < \pi\tau/2i$. На фиг. 2 изображены свободные линии тока при различных



Фиг. 4

Q' и $h/l=0.1$. Кривые 1-4 соответствуют значениям Q' , равным 0.098; 0.39; 0.74; 2.588 (при этом коэффициент сопротивления c_x на кривых 1-4 будет иметь значения: 0.85; 0.78; 0.86; 5.17 соответственно).

Как будет показано ниже, при $s \rightarrow 0$ критическая точка и точки перегиба на свободных струях уходят в бесконечность вверх по потоку, однако величина Q' остается ограниченной. В пределе получается струя, вытекающая из каверны с давлением P_0 в каверну с давлением P_∞ (например, кривая 4 на фиг. 2). При $s \rightarrow \pi\tau/4i$ $\delta/l \rightarrow 0$ ($Q' \rightarrow 0$), однако v_0/v_∞ остается величиной конечной и в пределе будем иметь течение по схеме Чаплыгина [1] с застойной зоной впереди пластинки. На фиг. 3 кривые 1-3 соответствуют значения $\sigma = (v_0/v_\infty)^2 - 1$, равные -0.6, -0.8, -0.9.

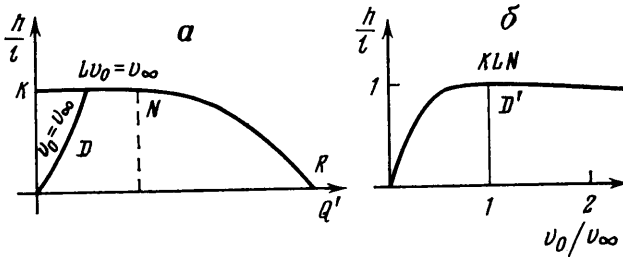
Обратимся теперь к определению силы, действующей на жидкость, заключенную внутри контура K и бес-

конечно удаленного сечения струйки. Не уменьшая общности рассуждений, положим $P_\infty=0$ и из уравнения количества движения найдем

$$(12) \quad F = X + \rho v_0^2 \delta + h P_0 = -i \frac{\rho v_\infty^2}{2} \oint \frac{dz}{du} du = \pi \rho v_\infty^2 \operatorname{res} \left[\frac{dz}{du}; u = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\operatorname{res} \left[\frac{dz}{du}; u = \frac{\pi}{2} \right] = \frac{Q i}{v_\infty \pi} \frac{1}{2!} \lim_{u \rightarrow \pi/2} \frac{d^2}{du^2} \left[\Phi(u) \left(u - \frac{\pi}{2} \right)^3 \right]$$

где X — сила, действующая на пластинку. На фиг. 4 изображены зависимости $c_x = F / (1/2 \rho v_\infty^2 l)$ от Q' при различных h/l (кривым 1–5 соответствующие значения h/l : 0, 0,2, 0,3, 0,7, 0,8), которые имеют минимум, причем при



Фиг. 5

минимальном c_x точка M находится на пластинке. Следует отметить, что каверна при увеличении Q' расширяется. Зависимости коэффициента сопротивления пластинки $c_x' = X / (1/2 \rho v_\infty^2 l)$ от Q' при различных h/l также изображены на фиг. 4 (6 $\rightarrow h/l=0,3$, 7 $\rightarrow h/l=0,5$, 8 $\rightarrow h/l=0,7$).

Если оставаться в рамках изучаемой кавитационной схемы, то при каждом значении h/l величины v_0/v_∞ и Q' будут ограничены некоторыми пределами. На фиг. 5 изображены для наглядности области D и D' изменения возможных параметров течения ($h/l, Q'$) и ($h/l, v_0/v_\infty$). Рассмотрим подробнее характер течения жидкости при соответствующих предельных значениях параметров. Граница OK замкнутой области D отвечает течению жидкости по схеме Чаплыгина с застойной зоной впереди. Действительно, из формул (5) и (6) при $s = \pi\tau/2i$ ($Q' = 0$) получим $p = -\pi\tau/2i$ ($v_0 < v_\infty$); $\xi = (u - \pi/2)i$. Выражение $z = z(u)$ можно теперь найти либо из формул (1), (2), либо непосредственно из формулы (7), если учесть, что при $Q' \rightarrow 0$ величина kQ' остается ограниченной

$$z = iM \int_0^u e^{-iu} \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_3(u) \vartheta_4(u)}{\vartheta_2^3(u)} du + \frac{il}{2} = M \int_0^u e^{-iu} \ln^m \vartheta_2(u) du + \frac{il}{2}$$

Напомним, что тэта-функции представимы рядами

$$\vartheta_1(u) = 2q^{1/4} \sin u - 2q^{9/4} \sin 3u + \dots, \quad \vartheta_3(u) = 1 + 2q \cos 2u + 2q^4 \cos 4u + \dots$$

$$\vartheta_4(u) = 1 - 2q \cos 2u + 2q^4 \cos 4u + \dots$$

Ряд для $\vartheta_2(u)$ был приведен раньше. Для определения h/l и M в зависимости от v_0/v_∞ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{h}{l} = 1 + \frac{2M}{l} \int_0^{\pi\tau/2} e^{iu} \frac{\vartheta_1(u) \vartheta_3(u) \vartheta_4(u)}{\vartheta_2^3} du$$

$$\frac{h}{l} = \frac{2M}{lq^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \cos u_1 \frac{\vartheta_1(u_1)\vartheta_2(u_1)\vartheta_4(u_1)}{\vartheta_3^3(u_1)} du_1, \quad u_1 = u - \frac{\pi\tau}{2}$$

Кривая $OK \equiv D'$ представляет собой зависимость h/l (v_0/v_∞), определяемую этими формулами. Если ввести число кавитации $\sigma = \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2 - 1$, то

формулу (12) можно представить в виде $c_x = c_x' - \sigma h/l$. На фиг. 6 изображены зависимости $1 \rightarrow c_x(\sigma)$ и $2 \rightarrow c_x'(\sigma)$. Определяемые отсюда значения c_x совпадают со значениями $c_x(Q')$ при $Q' \rightarrow 0$ на фиг. 4. Отметим, что при $\sigma = 0$ $c_x' = c_x = 0$.

На фиг. 6 построены каверны для различных h/l . При $h/l \rightarrow 0$ ($\tau/i \rightarrow \infty$) получается струйное обтекание пластинки по схеме Кирхгофа

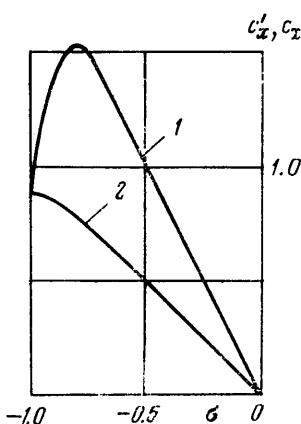
$$z = M \int e^{-iu} \frac{\sin u}{\cos^3 u} du + \text{const}$$

При $h/l \rightarrow 1$ имеем бесконечно протяженную каверну шириной l , обтекаемую невозмущенным потоком.

Рассмотрим предельный случай $s=0$. Уравнения (3), (5), (6), (7) примут вид $k=0$, $p = \pi\tau/2i$ ($v_0 > v_\infty$); $\zeta = -i(u + \pi/2)$

$$\frac{z}{l} = i \frac{Q'}{\pi} \int_0^u e^{iu} \ln' \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_2(u)} du + \frac{i}{2}$$

Это и есть решение задачи об истечении струи из каверны с давлением P_0 в каверну с давлением P_∞ . В этом случае скорость на пластинке меняется монотонно от v_0 до v_∞ . Кривые NH областей D и D' характеризуют собой зависимости h/l (Q'_{\max}) и h/l (v_0/v_∞). В этом случае $c_x = 2Q'$.



Фиг. 6

Из соотношения (5) видно, что при $s = \pi\tau/4i$, $p=0$. Этому случаю соответствует кривая OL области D (фиг. 5). Из уравнения (11) получим $m = \pi\tau/4i$, поскольку $\ln'\vartheta_2(0) = 0$, $\ln'\vartheta_2(\pi\tau/2) = -i$. Отсюда можно сделать вывод, что на пластинке всегда будет существовать точка M , в которой величина скорости меньше v_∞ , а на свободных линиях тока при $v_0 = v_\infty$ точек перегиба не будет.

Рассмотрим подробнее течение, отвечающее предельному значению $h/l=1$. Здесь также $p=0$, так как при $h/l \rightarrow 1$ $\tau/i \rightarrow 0$ и $s \rightarrow 0$. Поскольку в предельном случае ряды (8) расходятся, то при изучении течений, отвечающих

параметру $h/l=1$, нужно произвести следующую замену: $v = u\tau' - \pi\tau'/2$, $\tau' = -1/\tau$. С учетом соотношений

$$\begin{aligned} \vartheta_1(u) &= \beta\vartheta_1(v), & \vartheta_2(u) &= \beta\vartheta_1(v) \\ \vartheta_3(u) &= \beta\vartheta_2(v), & \vartheta_4(u) &= \beta\vartheta_3(v), & \beta &= \sqrt{-i\tau} e^{i\pi/2\pi\tau'} \end{aligned}$$

а также условия (5) формулы (2), (6), (1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\theta} &= M \frac{\theta_3(v)\theta_4(v)\theta_1(v-v_s)\theta_1(v+v_s)}{\theta_2^3(v)\theta_2(v)}; \quad v_s = is\tau' \\ e^z &= e^{-2vp/\pi} \frac{\theta_1(v-v_s)}{\theta_1(v+v_s)} \\ (13) \quad z &= M \int_{-\pi/2\tau'}^v e^{2vp/\pi} \frac{\theta_1^2(v+v_s)\theta_3(v)\theta_4(v)}{\theta_1^3(v)\theta_2(v)} dv + \frac{il}{2} \end{aligned}$$

В нулевом приближении по $q_1 = e^{i\pi\tau}$ получим решение задачи о соударении струи с потоком. В этом случае формула (13) примет вид

$$z = M \int \frac{\sin^2(v+v_s)}{\sin^3 v \cos v} dv + \text{const}$$

Последняя формула содержит свободный параметр v_s , однако при изменении его картина течения не меняется. Наличие свободного параметра обусловлено тем, что конец пластинки при различных Q' в предельном случае $h/l=1$ совпадает с различными точками свободной границы. Так, при $Q'=1$ точки A и B совпадут со свободной границей струи в бесконечности, при $Q'=0$ — с точкой перегиба на свободной границе, при $Q'=0$ — с бесконечно удаленной точкой на границе потока.

Из представлений зэта-функций рядами (8) следует, что подынтегральная функция $\Phi(u)$ раскладывается в ряд по степеням q , причем этот ряд тем быстрее сходится, чем больше $|\tau|$. Случай $|\tau| \rightarrow \infty$ соответствует струйному обтеканию пластинки с источником мощности Q в центре. В этом случае из (7) получим для k и z/l формулы

$$k = \frac{1}{2} \sin^2 is; \quad \frac{z}{l} = \frac{Q'i}{\pi} \int_0^u e^{iu} \frac{\cos^2(u+is) \sin u du}{\cos^3 u} + i \frac{l}{2}$$

в которых Q' и s связаны соотношением

$$\frac{\pi}{2Q'} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \text{ch}^2(u+s) \text{sh} u}{\text{ch}^2 u} du$$

Для определения c_x заметим, что в нулевом приближении по q имеем

$$\text{res} \left[\frac{dz}{du}; \frac{\pi}{2} \right] = \frac{Qi}{v_\infty \pi} \frac{1}{2!} \lim_{u \rightarrow \pi/2} \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{e^{iu} (u - \pi/2)^3 \sin u \cos^2(u+is)}{\cos^3 u} \right]$$

Раскрывая следующие неопределенные выражения путем разложения функций в ряды в окрестности $u = \pi/2$

$$3 \lim_{u \rightarrow \pi/2} \left(\cos^{-2} u - \left(u - \frac{\pi}{2} \right)^{-2} \right) = 1; \quad \lim_{u \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{u - \pi/2} + \text{tg} u \right) = 0$$

получим

$$\begin{aligned} \text{res} \left[\frac{dz}{du}; u = \frac{\pi}{2} \right] &= \frac{Qe^{2s}}{8\pi v_\infty} [9e^{-4s} - 2e^{-2s} + 1] = \frac{Q}{v_\infty \pi} \left[e^{-2s} + \frac{1}{2} \text{sh}^2 s \right] \\ c_x &= Q' [2e^{-2s} + \text{sh}^2 s] \end{aligned}$$

Суммарную силу F , определяемую формулой (12), можно интерпретировать как силу, действующую на систему, состоящую из пластинки и камеры с давлением P_0 , из которой вытекает струйка с расходом Q' . Как видно из (12) и (14), нулевой член разложения F в ряд по q равен силе, действующей со стороны жидкости на пластинку с источником. Кривая I (фиг. 4), соответствующая $q=0$, совпадает с кривой, полученной в [3] при решении задачи о струйном обтекании пластинки с источником, в которой сила определялась как интеграл от давления по пластинке, взятый в смысле главного значения. Из фиг. 2 и 4 видно, что замена струйки источником дает хорошее приближение как для силовых характеристик, так и для определения формы свободных линий тока. Важно отметить, что $c_{x \min}$ на всех кривых практически достигается при одном и том же $Q' \approx 0.43$; лишь при $h/l=1$ зависимости $c_x(Q')$ начинают резко отличаться от кривой I , причем при $h/l=1$ $c_x(Q')=0$.

Авторы выражают признательность Л. И. Седову за внимание к работе и Г. Ю. Степанову за предложение метода решения и полезное обсуждение.

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970.
3. Штанько В. А. О струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток. Тр. НИИ прикл. мат. и мех. при Томском ун-те, 1976, т. 7, 120—123.