

КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

И. Б. СИМАНОВСКИЙ

(Пермь)

Конвективная устойчивость равновесия в системе двух несмешивающихся жидкостей изучалась теоретически в линейной постановке в работах [1-4]. В [1] определена граница устойчивости равновесия двух жидкостей в шаровой полости с границей раздела по экваториальной плоскости. Случай жидкостей с близкими свойствами, заполняющими шаровую полость в произвольном отношении, рассмотрен в [2]. Критические числа Рэлея для двух плоских бесконечных горизонтальных слоев керосина и раствора поваренной соли в воде вычислялись в [3]. В названных работах граница раздела жидкостей предполагалась плоской, термокапиллярные явления не учитывались. Устойчивость равновесия плоских горизонтальных слоев с учетом капиллярных эффектов, существенных в достаточно тонких слоях, исследовалась в [4]. Подробное экспериментальное исследование конвективной устойчивости двух несмешивающихся жидкостей в условиях, когда термокапиллярные эффекты несущественны, выполнено для шаровой полости в [5] и для плоских горизонтальных слоев в [6].

В данной работе рассматривается конвекция конечной амплитуды в системе двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих полость квадратного сечения с горизонтальной границей раздела посередине полости. Полные нелинейные уравнения плоского конвективного движения решаются численно методом конечных разностей. Основное внимание уделено исследованию структуры надкритических движений и их устойчивости.

1. Рассмотрим бесконечный горизонтальный цилиндр квадратного поперечного сечения, заполненный двумя различными несмешивающимися жидкостями. Граница раздела жидкостей проходит посередине полости и предполагается горизонтальной и недеформируемой; термокапиллярные эффекты на ней не учитываются. Все границы полости твердые. Горизонтальные границы поддерживаются при постоянных различных температурах (подогрев снизу); вдоль вертикальных границ полости температура изменяется по линейному закону.

Система уравнений свободной конвекции для верхней (первой) и нижней (второй) жидкостей имеет вид (начало координат помещено в центре квадрата, ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх)

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = - \frac{\nabla p_i}{\rho_i} + \nu_i \Delta \mathbf{v}_i + g \beta_i T_i \gamma$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla T_i = \chi_i \Delta T_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \quad (i=1, 2)$$

Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к верхней жидкости, обозначены индексом 1, а величины, относящиеся к нижней жидкости, — индексом 2.

В уравнениях (1.1), (1.2) все обозначения обычные; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Сформулируем граничные условия.

На твердых границах

$$(1.3) \quad v_1=0, \quad v_2=0, \quad T_1=0 \quad (y=a), \quad T_2=\theta \quad (y=-a)$$

$$T_1=\theta \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right), \quad x=-a, a \quad (y \geq 0)$$

$$T_2=\theta \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} \right) \left(1 - \frac{\kappa_1 y}{\kappa_2 a} \right), \quad x=-a, a \quad (y \leq 0)$$

($2a$ — сторона квадрата).

На недеформируемой границе раздела жидкостей $y=0$ обращаются в нуль нормальные к границе составляющие скорости (условие неперетекания жидкостей) и выполняются условия непрерывности тангенциальных составляющих скорости, касательных напряжений, температуры и теплового потока

$$(1.4) \quad v_{1n}=0, \quad v_{2n}=0, \quad v_{1\tau}=v_{2\tau}$$

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1\tau}}{\partial n} = \eta_2 \frac{\partial v_{2\tau}}{\partial n}, \quad T_1=T_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$$

Здесь θ — разность температур горизонтальных границ, κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности, η_1 и η_2 — коэффициенты динамической вязкости жидкостей.

Предполагая движение плоским, запишем уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3), (1.4) в переменных функции тока — вихрь скорости. Функция тока ψ и вихрь скорости φ связаны с компонентами скорости v_x и v_y соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Перейдем также к безразмерным переменным, используя в качестве единиц длины, времени, функции тока и температуры соответственно величины a , a^2/ν_1 , ν_1 и θ . Тогда уравнения и граничные условия запишутся следующим образом:

$$(1.5) \quad L\varphi_i = a_i \Delta \varphi_i + b_i \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad LT_i = c_i \Delta T_i$$

$$(1.6) \quad \Delta \psi_i = -\varphi_i, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (i=1, 2)$$

$$a_1=1, \quad a_2=1/\nu, \quad b_1=G, \quad b_2=G/\beta, \quad c_1=1/P, \quad c_2=1/\chi P$$

$$(1.7) \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad T_1=0 \quad (y=1), \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0, \quad T_2=1 \quad (y=-1)$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad T_1 = \frac{1-y}{\kappa+1} \quad (x=-1, 1), \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0,$$

$$T_2 = \frac{1-\kappa y}{\kappa+1} \quad (x=-1, 1)$$

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \eta \varphi_1 = \varphi_2, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} \quad (y=0)$$

В соотношения (1.5)–(1.7) входят семь безразмерных параметров: числа Грасгофа $G = g\beta_1\theta a^3/\nu_1^2$ и Прандтля $P = \nu_1/\chi_1$, определенные по характеристикам верхней жидкости, а также отношения параметров жидкостей $\beta = \beta_1/\beta_2$, $\eta = \eta_1/\eta_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$.

Приведем также соотношения, связывающие определенное выше число Грасгофа G с числами Грасгофа $G_i = g\beta_i(\theta/(\kappa+1))a^3\nu_i^{-2}$ ($i=1, 2$), определенными по равновесным градиентам температуры и параметрам соответственно первой и второй жидкостей

$$(1.8) \quad G_1 = \frac{1}{\kappa+1} G, \quad G_2 = \frac{\nu^2 \kappa}{\beta(\kappa+1)} G$$

Из формул (1.8) следует, что числа Рэлея R_1 и R_2 , определенные по параметрам верхней и нижней жидкостей, связаны соотношением $R_1 = \beta R_2/(\nu\chi\kappa)$.

2. Краевая задача (1.5)–(1.7) решалась методом конечных разностей; параллельно использовались две схемы второго порядка точности по пространственным производным – явная схема и схема продольно-поперечной прогонки [7, 8]. Вводилась равномерная прямоугольная расчетная сетка с ячейками $(\Delta x \times \Delta y)$. Значения вихря на твердых границах вычислялись по формулам Тома. Для вычисления ϕ и T на границе раздела использовались соотношения, следующие из условий (1.4)

$$(2.1) \quad \phi_1(x, 0) = \frac{-2[\psi_2(x, -\Delta y) + \psi_1(x, \Delta y)]}{(\Delta y)^2(1+\eta)}, \quad \phi_2(x, 0) = \eta\phi_1(x, 0)$$

$$T(x, 0) = \frac{T_2(x, -\Delta y) + \kappa T_1(x, \Delta y)}{(1+\kappa)}$$

Стационарные решения находились методом установления. Величина шага по времени выбиралась из условий устойчивости счета; уравнения Пуассона (1.6) итерировались с точностью 10^{-3} . Критерием выхода на стационарный режим служило уменьшение относительного изменения характеристик до 10^{-5} – 10^{-7} , это требовало обычно нескольких единиц безразмерного времени (в отдельных случаях до 10–15 единиц). Основные результаты получены на сетке 10×20 , проверочные расчеты проводились на сетках 20×20 и 20×40 . Результаты, полученные на проверочных сетках, отличаются от основных не более чем на 3%.

3. Перейдем к обсуждению результатов расчетов. Численное решение нестационарных уравнений конвекции позволяет определить как границу устойчивости равновесия (критическое число Грасгофа), так и структуру и амплитуду возникающих движений. Критическое число Грасгофа определялось путем наблюдения за развитием возмущений, наложенных на покоящуюся жидкость. Возмущения вносились одновременно в обе жидкости и обычно представляли собой локальные изменения полей вихря скорости.

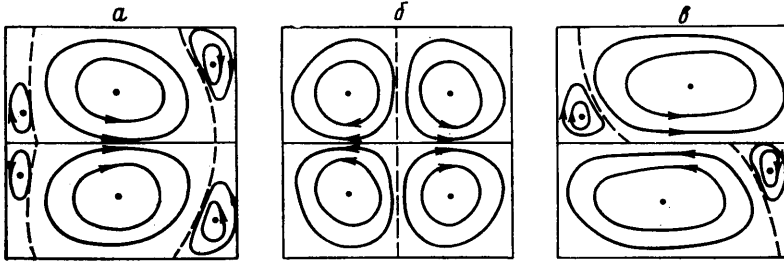
В надкритической области развитие возмущений приводит (при не слишком больших величинах надкритичности) к установлению стационарного движения. Для выяснения зависимости структуры движения от начальных условий при заданных значениях параметров проводились серии расчетов, отличающихся видом начального возмущения. При получении амплитудных кривых (зависимостей интенсивности движения от числа Грасгофа) использовался и другой способ задания начальных условий, при котором начальные поля ϕ и T берутся из решения, соответствующего другому (близкому к данному) числу Грасгофа.

Остановимся прежде всего на случае одинаковых жидкостей ($\beta = \eta = \nu = \kappa = \chi = 1$); число Прандтля в этих расчетах было фиксированным ($P=1$). В этом случае нет физических причин, выделяющих границу раздела. Однако с математической точки зрения постановка задачи вполне корректна, а ее решение позволяет получить сведения о роли границы

раздела независимо от различия свойств жидкостей. К тому же обсуждаемый случай может служить моделью системы двух жидкостей с близкими свойствами.

В данной ситуации равновесные градиенты температуры (числа Рэлея) одинаковы для обеих жидкостей, и, как показывают расчеты, при превышении критического числа $G_* = 3.8 \cdot 10^3$ в обеих жидкостях развивается движение, имеющее одинаковую интенсивность и структуру.

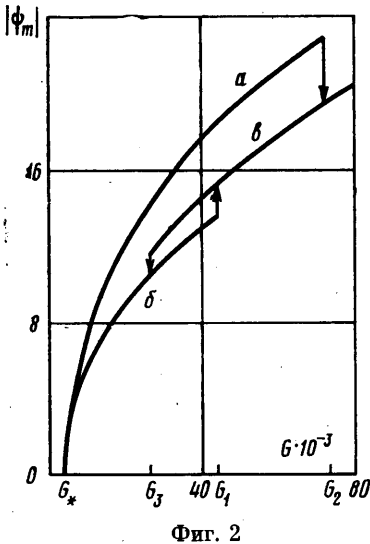
При $G = G_*$ равновесие в зависимости от структуры начального возмущения теряет устойчивость относительно одного из двух типов движений



Фиг. 1

(движения a и b на фиг. 1). Это объясняется близостью критических чисел Грасгофа для этих движений, что можно предвидеть на основе результатов линейной теории для квадратной полости, заполненной однородной жидкостью [9] (условие неперетекания выделяет третье и четвертое критические движения).

При $G > G_*$ движения типа a и b сохраняют ту же симметрию (движение a симметрично относительно горизонтальной оси, а движение b — относительно вертикальной и горизонтальной осей). На фиг. 2 показаны амплитудные кривые для этих движений; в качестве меры интенсивности движения используется максимальное значение функции тока ψ_m . Интересно отметить, что движение, отличающееся от движения b только направлением вращения вихрей и имеющее то же критическое число, в надкритической области реализовать не удается.



Фиг. 2

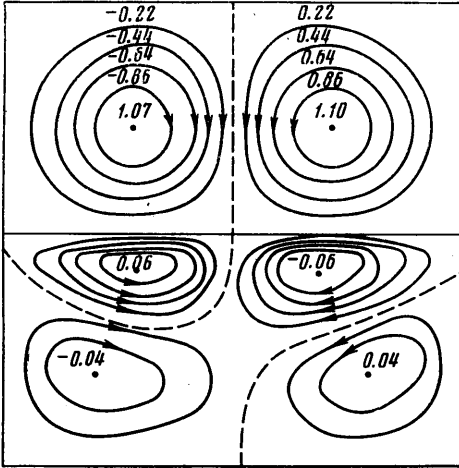
При увеличении числа Грасгофа четырехвихревое движение сохраняет устойчивость вплоть до $G_1 = 44 \cdot 10^3$; в этом интервале движение b можно получить из возмущений равновесия или из движения того же типа при близком числе Грасгофа. При $G > G_1$ движение b перестраивается в движение v (фиг. 1). В последнем преобладает двухвихревая структура, однако направления вращения вихрей таковы, что на границе раздела возникает встречное течение жидкостей. Реализация такой

«неправильной» структуры обусловлена, по-видимому, наличием градиента температуры вдоль границы раздела; действие этого градиента компенсирует вязкие напряжения.

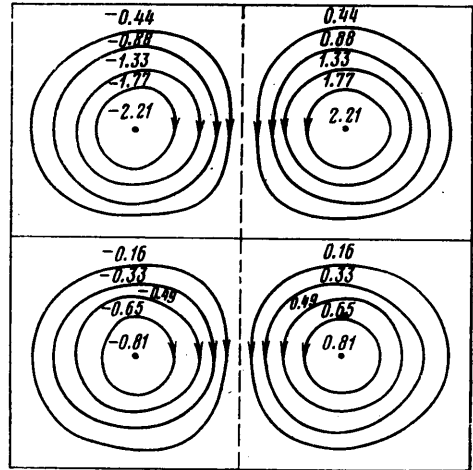
При переходе четырехвихревого движения b в движение v наблюдаются гистерезисные явления. Область существования движения v удастся

продолжить в сторону меньших G до $G=G_3=26 \cdot 10^3$, если в качестве начальных условий использовать движение той же структуры. Движение a остается устойчивым до более высоких значений числа Грасгофа. При $G=G_2=73 \cdot 10^3$ это движение (преимущественно двухвихревое) также переходит в движение ϵ с «неправильным» направлением вращения.

При более высоких числах Грасгофа единственно устойчивое движение ϵ перестает быть стационарным. Его интенсивность колеблется (с некоторой деформацией структуры); амплитуда колебаний увеличивается



Фиг. 3



Фиг. 4

с ростом G . При дальнейшем увеличении G колебания становятся нерегулярными.

Таким образом, наличие границы раздела (даже в системе одинаковых жидкостей) приводит к качественно новому эффекту — существованию при определенных условиях различных надкритических структур.

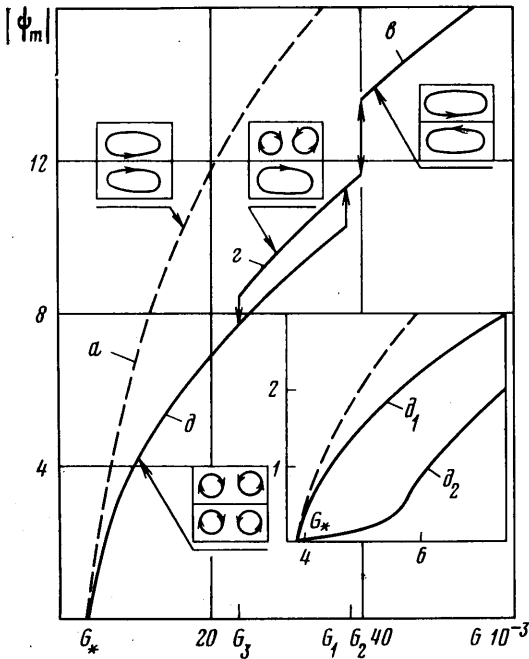
Рассмотрим теперь результаты, относящиеся к случаю, когда динамические и кинематические вязкости жидкостей отличаются в 2 раза ($\eta = \nu = 0.5$, $\beta = \kappa = \chi = 1$), $P = 1$. При данном соотношении параметров числа Рэлея, определенные по параметрам верхней и нижней жидкостей, отличаются в 2 раза: $R_1 = 2R_2$. По этой причине критические условия достигаются при увеличении разности температур горизонтальных границ не одновременно в обеих жидкостях. При $G > G_* = 3.8 \cdot 10^3$ интенсивная конвекция, обусловленная объемной (архимедовой) силой, развивается только в верхней жидкости, в то время как в нижней жидкости существует лишь слабое течение возле границы раздела, индуцированное движением верхней жидкости.

Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к тому, что наступают критические условия и в нижней жидкости, и интенсивность конвективного движения в ней усиливается. Различные стадии этого процесса представлены на фиг. 3, 4, где показаны карты линий тока соответственно для $G = 4.5 \cdot 10^3$ и $6 \cdot 10^3$. При $G = 6 \cdot 10^3$ наблюдается интенсивное двухвихревое движение, охватывающее весь объем.

Различие в характере возникновения конвекции в верхней и нижней жидкостях прослеживается и на начальном участке амплитудных кривых (фиг. 5). На вставке в увеличенном масштабе показаны зависимости интенсивности движений в верхней (кривая δ_1) и нижней (кривая δ_2) поло-

винах области от числа Грасгофа вблизи $G=G_*$. Заметим, что подобные явления обнаружены в экспериментах [5, 6].

Перейдем к рассмотрению структуры надкритических движений, реализующихся в случае $\eta=\nu=0.5$. На фиг. 5 представлена зависимость максимального значения функции тока в верхней половине полости от числа Грасгофа. Единственно устойчивой в надкритической области (до $G=G_1=3.8 \cdot 10^4$) является структура, показанная на фиг. 4. Эта структура отличается от движения б, возникающего в случае одинаковых жидкостей (см. фиг. 1), отсутствием симметрии относительно горизонтальной оси как



Фиг. 5

следствие изменения направления вихревых движений, так и из-за неодинаковости интенсивности верхнего и нижнего движений. Оба эффекта обусловлены, по-видимому, различием чисел Рэлея для верхней и нижней жидкостей.

Как и в случае одинаковых жидкостей, при высоких числах Грасгофа четырехвихревая структура становится неустойчивой и переходит в двухвихревую с встречными потоками на границе раздела.

Однако теперь этот переход происходит через промежуточную стадию, связанную с реализацией движения г. При этом также наблюдаются гистерезисные явления, обусловленные взаимодействием между структурами δ и г.

Движение а в случае $\eta=\nu=0.5$ оказывается мета-

стабильным — оно возникает из возмущения соответствующей формы и практически стационарируется, но по прошествии некоторого времени разрушается и превращается в движение δ . Наложением соответствующих условий симметрии можно запретить движение δ и сделать двухвихревую структуру устойчивой (штриховая кривая на фиг. 5).

Рассмотрим также кратко некоторые результаты для других значений параметров жидкостей. Случай $\eta=\nu=2$ (остальные отношения параметров равны единице; $P=1$) представляет интерес ввиду того, что теперь $R_1=0.5R_2$ и условия возникновения конвекции в верхней и нижней половинах полости обратны имевшим место в рассмотренном выше случае $\eta=\nu=0.5$. Расчеты показывают, что конвекция возникает сначала в нижней жидкости, индуцируя вторичное движение в верхней.

При $\kappa=\chi=0.5$ ($\beta=\eta=\nu=1$; $P=1$), как и в обсуждавшемся выше случае $\eta=\nu=0.5$, число Рэлея R_1 для верхней половины полости оказывается больше числа Рэлея R_2 для нижней половины ($R_1=4R_2$) и интенсивная конвекция также возникает сначала в верхней половине полости. Однако условия на границе раздела (см. (1.4)) теперь иные, поэтому, как показывают расчеты, возникает интересный эффект: при числах Грасгофа

$G > 11 \cdot 10^3$ движение в нижней жидкости (где число Рэлея R_2 меньше) становится интенсивнее, чем в верхней. Заметим, что при $\eta = \nu = 0.5$ интенсивность верхнего движения во всем интервале устойчивости четырехвихревой структуры превышала интенсивность нижнего движения.

В случае, когда коэффициенты теплового расширения жидкостей отличаются в 10 раз ($\beta = 0.1$, $\kappa = \chi = \eta = \nu = 1$, $P = 1$), происходит значительный сдвиг порога устойчивости, критическое число Грасгофа $G_* = 4 \cdot 10^2$.

Интересно также отметить, что структура б, возникающая в результате потери устойчивости равновесия, переходит теперь в другую четырехвихревую структуру, в которой два вихря значительно интенсивней остальных.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за руководство работой, Г. И. Бурдэ за постоянное внимание к работе и А. А. Непомнящего за полезные советы.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость равновесия двух несмешивающихся жидкостей в шаровой полости. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 184.
2. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвективная неустойчивость равновесия двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих шаровую полость в произвольном отношении. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1970, № 216.
3. Березовский Э. И., Перельман Т. Л., Ромашко Е. А. О конвективной устойчивости в системе двух неограниченных горизонтальных слоев несмешиваемых жидкостей. Инж.-физ. ж., 1974, т. 27, № 6.
4. Zeren R. W., Reynolds W. C. Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. J. Fluid Mech., 1972, vol. 53, pt 2.
5. Поддубная Л. Г., Рудаков Ю. П., Шайдуров Г. Ф. Тепловая неустойчивость двухслойной жидкости в шаровой полости. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 184.
6. Адилов Р. С., Путин Г. Ф., Шайдуров Г. Ф. Конвективная устойчивость двух несмешивающихся жидкостей в горизонтальной щели. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1976, № 362.
7. Тарунин Е. Л. Численное исследование свободной конвекции. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 184.
8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.