

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЧАСТИЧНО
ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА ИЛИ
ОТСОСА

Э. А. ГЕРШБЕЙН, С. В. ПЕЙГИН

(Москва)

Рассматриваются плоские и осесимметричные течения многокомпонентного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое с ненулевой касательной составляющей скорости на проницаемой поверхности. Асимптотические решения уравнений пограничного слоя, полученные ранее [1-4] для больших значений параметров вдува и отсоса, обобщаются на случай, когда вектор скорости вдуваемого или отсасываемого газа составляет острый угол с поверхностью тела, зависящий от продольной координаты. На основании результатов численного решения уравнений пограничного слоя оценивается область применимости асимптотических формул. Приводятся некоторые результаты расчета пограничного слоя на частично подвижной поверхности.

Исследование течения жидкости или газа в пограничном слое на подвижной поверхности проводилось во многих работах [5-20]. Решение автомодельных уравнений пограничного слоя рассматривалось в [5-10], неавтомодельных - в [11-15]. В работах [16-17] изучался переход ламинарного пограничного слоя с неподвижного участка поверхности на подвижный. Решение уравнений пограничного слоя в окрестности точки разрыва скорости на поверхности строилось асимптотическим методом внешних и внутренних разложений. В рамках уравнений невязкого пограничного слоя с продольным градиентом давления, определяемым в процессе решения, задача о наклонном вдуве рассматривалась в [20].

Имеются также экспериментальные работы [18, 19].

1. Асимптотическое решение уравнений пограничного слоя при сильном наклонном вдуве. Обобщим асимптотическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя при больших значениях параметра вдува Φ (см. [1, 2]) на случай, когда вектор скорости вдуваемого газа составляет острый угол с поверхностью тела.

Пусть на поверхности тела при $y=0$

$$\rho v = G(x), \quad u = u_w(x), \quad T = T_w(x) \quad (1.1)$$

$$G(C_i - C_i^{(1)}) + J_i = 0$$

Будем предполагать, что

$$u_w(x)/u_w(0) \geq 0, \quad u_w(0)/u_w(0) < \infty \quad (1.2)$$

Обозначения приведены в [1, 2].

При больших значениях параметра Φ течение в пристеночном слое при отсутствии химических реакций описывается системой уравнений (2.7) работы [1] или (1.6) работы [2], решение которых с граничными условиями (1.1) имеет следующий вид:

$$u^2(x, t) = \frac{2}{\kappa_w(t)} \frac{P(t)}{\rho_w(t)} \left\{ 1 - \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{\kappa_w(t)} \right\} + u_w^2(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{T(x, t)}{T_w(t)} = \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{v_w(t)}$$

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_w(t)} = \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{v_w^{-1}(t)}$$

$$C_i(x, t) = C_{iw}(t) \quad (i=1, \dots, N)$$

$$y(x, t) = \frac{1}{r^k} \int_t^x \frac{\rho_w(t) v_w(t) r^k(t) dt}{\rho(x, t) u(x, t)} \quad (x \geq t \geq 0)$$

Здесь t — координата x выхода линии тока из поверхности тела, $t=0$ соответствует разделяющей линии тока.

На критической линии при $x=0$ будем иметь

$$(1.4) \quad T(0, y) = T_w, \quad C_i(0, y) = C_{iw} \quad (i=1, \dots, N), \quad \rho(0, y) = \rho_w$$

В случае осесимметричного течения

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_w}{\partial x} + C \frac{y}{v_w}, \quad v = \frac{v_w}{C} \left[P_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$y^* = v_w \left(\sqrt{P_2} + \frac{\partial u_w}{\partial x} \right), \quad C \equiv P_2 - \left(\frac{du_w}{dx} \right)^2$$

$$P_2 \equiv - \frac{1}{\rho_w} \frac{d^2 P}{dx^2}$$

В случае плоского течения

$$(1.6) \quad v = \frac{v_w}{\sqrt{P_2} K} \left| P_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right|^{1/2}, \quad K \equiv \left(\frac{|C|}{P_2} \right)^{1/2}$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{P_2} \cos \left(\arcsin K - \frac{y}{v_w} \sqrt{P_2} K \right), \quad y^* = \frac{v_w}{K \sqrt{P_2}} \arcsin K \quad (C > 0)$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{P_2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{Arsh} K - K \sqrt{P_2} \frac{y}{v_w} \right)$$

$$y^* = v_w K^{-1} P_2^{-1/2} \operatorname{Arsh} K \quad (C < 0)$$

При $C=0$ формулы (1.5), (1.6) — (1.8) переходят в следующие:

$$(1.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{P_2}, \quad v = v_w - (k+1) \sqrt{P_2} y, \quad y^* = v_w / (k+1) \sqrt{P_2}$$

На поверхности тела при $y=0$ имеем (индекс w опускаем)

$$(1.10) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho v} \frac{dP}{dx} - \frac{u}{v} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{u}{c_p \rho v} \frac{dP}{dx} - \frac{u}{v} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial y} = - \frac{u}{v} \frac{\partial C_i}{\partial x} \quad (i=1, \dots, N)$$

Нетрудно получить решение и в высших приближениях. Например, в случае течения однородной несжимаемой жидкости с учетом двух приближений имеем на поверхности тела (индекс w опускаем)

$$(1.11) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{1}{\rho v} \frac{dP}{dx} + \frac{u}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{k\mu u}{\rho v^2} \frac{dr}{dx} \right) + \\ + \frac{\mu u}{\rho v^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho v} \frac{dP}{dx} + \frac{u}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Изучим область существования решения (1.3). Решение уравнений пограничного слоя с отрицательным градиентом давления существует при сколь угодно больших значениях параметра вдува [21]. В случае нулевого градиента давления ($dP/dx=0$) решение уравнений пограничного слоя на неподвижной поверхности существует только до некоторого конечного значения параметра вдува [5, 21]. При обтекании затупленных тел градиент давления dP/dx (или d^2P/dx^2 в критической точке) на лобовой поверхности отрицателен, но может обратиться в нуль и стать положительным. Пусть $dP/dx=0$ при $x=x_0$. Если $u_w=0$, то из системы (1.3) следует, что в данной точке на поверхности тела интеграл в (1.3) имеет неинтегрируемую особенность. Толщина слоя вдуваемых газов $y^*(x)$ при x , стремящемся к x_0 , стремится к бесконечности. Анализ результатов численного решения исходных уравнений пограничного слоя [1] показывает, что с увеличением параметра вдува от нуля точка отрыва пограничного слоя приближается к точке $x=x_0$ и при больших значениях параметра вдува практически совпадает с ней.

В случае, когда касательная составляющая вектора скорости вдува u_w положительна, скорость $u(x, t)$, определяемая первой формулой (1.3), может обратиться в нуль только при $P(x) > P(t)$ ($x > t$). Пусть $x^*=x^*(t)$ — координата точки на линии тока, в которой $u(x, t)$ обращается в нуль. Тогда для ее определения имеем уравнение

$$(1.12) \quad P(x^*) = P(t) \left\{ 1 + \frac{\kappa_w(t) \rho_w(t)}{2P(t)} u_w^2(t) \right\}^{1/\kappa_w(t)}$$

Пусть при $t=t^*$ функция $x^*=x^*(t)$ имеет минимум. Предполагая все функции в (1.12) гладкими, получаем следующее алгебраическое уравнение для определения t^* :

$$(1.13) \quad \frac{d}{dt} \left[P(t) \left\{ 1 + \frac{\kappa_w(t) \rho_w(t) u_w^2(t)}{2P(t)} \right\}^{1/\kappa_w} \right] = 0$$

В случае течения несжимаемой жидкости уравнение (1.13) принимает вид

$$(1.14) \quad u_w \frac{du_w}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = 0$$

В точке (x^*, t^*) интеграл в (1.3) расходится, т. е. толщина слоя вдуваемых газов при x , стремящемся к x^* , стремится к бесконечности. Следует отметить, что в данном случае особая точка находится не на поверхности, как при $u_w=0$, а внутри пограничного слоя. Можно показать, что условия (1.12), (1.13) эквивалентны условиям

$$(1.15) \quad u=0, \quad \partial u / \partial y = 0$$

Таким образом, при $u_w > 0$ имеется некоторая область течения ($x < x^*$) с нулевым и положительным градиентом давления, в которой уравнения невязкого пограничного слоя имеют решение.

Рассмотрим теперь случай задания касательной составляющей вектора скорости вдува в виде

$$(1.16) \quad u_w = a [\operatorname{arctg} bx^\circ + \operatorname{arctg} b(x-x^\circ)]$$

где a , b , x° — некоторые параметры. При b^{-1} , стремящемся к нулю, (1.16) моделирует разрыв касательной составляющей вектора скорости на поверхности тела в точке $x=x^\circ$. Нормальную составляющую скорости на поверхности считаем непрерывной. Нетрудно увидеть, в пределе при $b \rightarrow \infty$ решение (1.3) имеет контактный разрыв на линии тока, выходящей из точки $t=x^\circ$.

2. Асимптотическое решение уравнений пограничного слоя при сильном наклонном отсосе. Пусть на поверхности тела при $y=0$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \rho v = G(x) < 0, \quad u = u_w(x), \quad T = T_w(x) \\ C_i = C_{iw}(x) \quad (i=1, \dots, N) \\ u_w(x)/u_e(x) \geq 0, \quad u_w(0)/u_e(0) < \infty \end{aligned}$$

При больших значениях параметра отсоса асимптотические уравнения, описывающие течение многокомпонентного сжимаемого газа в пограничном слое, при отсутствии гомогенных химических реакций, в первом приближении имеют вид (2.5)–(2.2) [4]. Решение уравнений диффузии с граничными условиями на поверхности тела (2.1) совпадает с решением, приведенным в [4]. Решение уравнений импульсов и энергии имеет следующий вид:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= (u_e - u_w) \int_0^\eta S \exp\left(-\int_0^\eta S dy\right) dy + u_w \\ T &= T_w + T_e \int_0^\eta \left[(1 - \theta_w) k_s + \alpha \left(1 - \frac{u_w}{u_e}\right)^2 \left(\frac{1}{2} k_i - \int_0^\eta \frac{c}{\omega} dy\right) \right] a \omega dy \end{aligned}$$

Обозначения приведены в [4].

На поверхности тела при $y=0$ получаем следующие выражения для трения, теплового потока и диффузионных потоков компонент:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial y} &= -(\rho v)_w (u_e - u_w) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} &= -(\rho v)_w [c_{pe}(T_e - T_w) + 1/2 (u_e - u_w)^2 k_i] \\ I_i &= (\rho v)_w (C_{ie} - C_{iw}) \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned}$$

Отметим, что последующие члены разложения также могут быть найдены в квадратурах. Например, в случае течения однородной несжимаемой жидкости получаем следующее решение в размерном виде с учетом двух приближений:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v &= v_w - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(u_e - u_w)v}{v_w} + u_e y - \frac{(u_e - u_w)v}{v_w} e^\zeta \right] \\ u &= u_e - (u_e - u_w) e^\zeta + \left[-v \frac{d_1}{2v_w^2} + y \left(\frac{d_2}{v_w} - \frac{d_3}{v_w^2} \right) + y^2 \frac{d_3}{2v_w} \right] e^\zeta + v \frac{d_1}{2v_w^2} e^{2\zeta}, \quad \zeta = \frac{y v_w}{v} \end{aligned}$$

$$d_1 = (u_e - u_w)^2 \frac{1}{v_w} \frac{dv_w}{dx}, \quad d_2 = u_w \frac{du_w}{dx} - u_e \frac{du_e}{dx} - d_1$$

$$d_3 = (u_e - u_w) \left(v_w \frac{du_e}{dx} - u_e \frac{dv_w}{dx} \right)$$

Авторы для данного случая вычислили также решение с учетом трех приближений, однако в силу его громоздкости оно здесь не приводится.

При $u_w=0$ формулы (2.4) совпадают с соответствующими формулами работы [3].

Для определения точки отрыва пограничного слоя получаем систему двух алгебраических уравнений, вытекающих из условий (1.15) и решения (2.4). Отметим, что асимптотическое решение в первом приближении не дает отрыва. Точка отрыва может быть найдена из асимптотического решения с учетом второго и последующих приближений.

Если функцию u_w задать формулой (1.16) и устремить параметр b к бесконечности, то в пределе получим разрывное решение, причем линией разрыва является прямая $x=x^0$.

3. Численное решение уравнений пограничного слоя при наличии наклонного вдува или отсоса. Уравнения пограничного слоя (1.5), (1.6) работы [1] с граничными условиями (1.9) работы [1] на внешней границе пограничного слоя и следующими условиями на поверхности тела:

$$(3.1) \quad f=f_w, \quad f'_\eta = u_w/u_e, \quad \theta = \theta_w$$

$$(\eta=0)$$

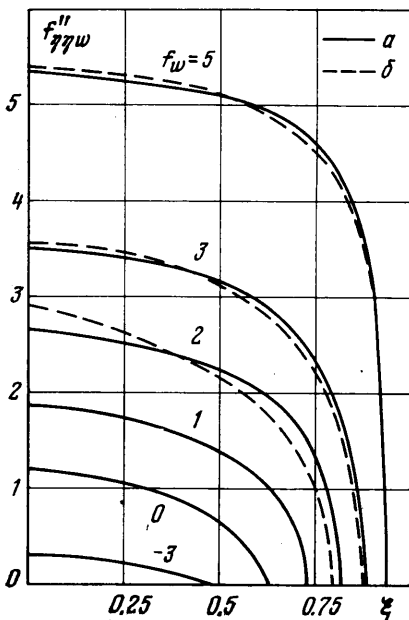
решались для случая течения однородного газа около сферы и кругового цилиндра. Использовалась неявная двух-

слойная разностная схема с точностью аппроксимации [22] $O(\Delta\eta^4) + O(\Delta\xi)$. Параметр вдува — отсоса f_w полагался постоянным вдоль поверхности тела и варьировался в пределах $-5 \leq f_w \leq 5$. Зависимость параметра u_w/u_e от продольной координаты имела вид

$$(3.2) \quad u_w/u_e = \text{const}, \quad 0 \leq u_w/u_e \leq 1$$

Расчеты, проведенные для случая задания параметра u_w/u_e в виде (3.2), показывают, что трение и тепловой поток, подсчитанные по асимптотическим формулам (1.10), (2.3), с удовлетворительной точностью, как и при $u_w=0$ (см. [1, 2, 4]), совпадают с соответствующими величинами, полученными численно при $-f_w \geq 2-3$ для вдува и при $f_w \geq 5$ для отсоса.

Аналогичные расчеты были проведены и для течения несжимаемой жидкости. Следует заметить, что профили касательной составляющей скорости, полученные из асимптотического решения, при $|f_w| \geq 5$ с небольшой погрешностью совпадают с профилями, полученными численно поперек всего пограничного слоя. Это же относится и к координатам точки отрыва. Для примера на фиг. 1 для различных значений параметра отсоса приведено распределение безразмерного трения $f''_{\eta w}$ вдоль поверхности



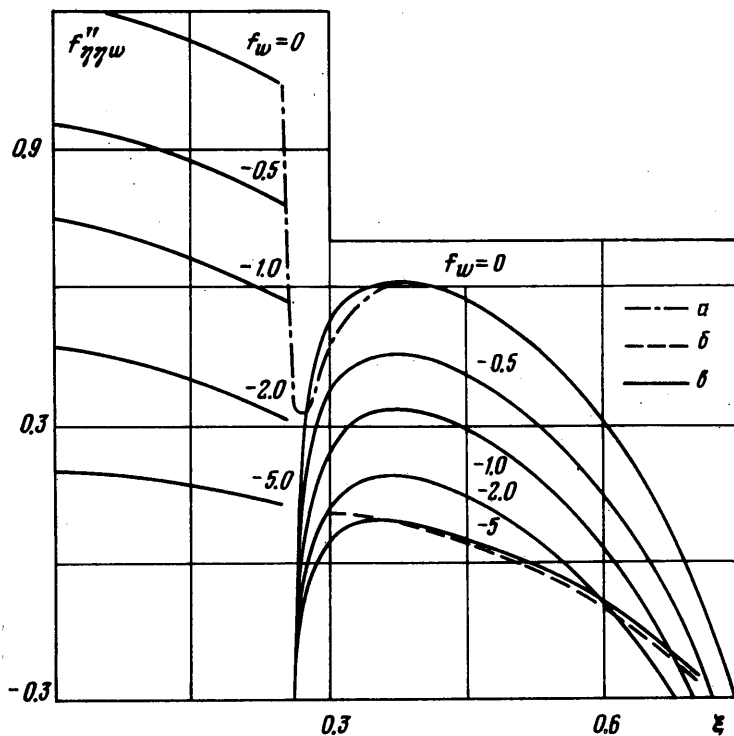
Фиг. 1

кругового цилиндра ($u_w=0$, $\beta=(1-2\xi)/(1-\xi)$). Линии a — численное решение, линии b — асимптотическое решение (2.4). Сравнение асимптотических и численных решений при сильном вдуве приведено в работе [1].

Аналогичные зависимости получены и для $u_w \neq 0$.

4. Численное решение уравнений ламинарного пограничного слоя на частично подвижной поверхности при наличии вдува или отсоса.

Рассмотрим течение однородной несжимаемой жидкости в пограничном слое кругового цилиндра. Внешнее течение будем предполагать потен-



Фиг. 2

циальным ($u_e=2U_\infty \sin \theta$). На поверхности тела и внешней границе пограничного слоя зададим граничные условия

$$(4.1) \quad \begin{aligned} f &= f_w, \quad f'_\eta = 0 \quad (\xi \leq \xi^0) \\ f'_\eta &= u_w/u_e \quad (\xi > \xi^0) \quad \text{при } \eta = 0 \\ f'_\eta &\rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

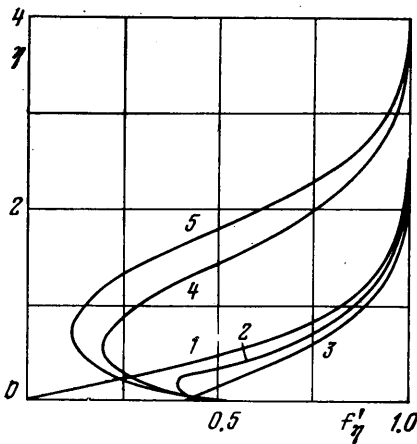
Отметим, что предположения, обычно используемые в теории пограничного слоя, нарушаются в окрестности разрыва граничных условий и в принципе возмущения, возникающие в этой точке, могут распространяться вверх по потоку. Однако эксперименты, проведенные в дозвуковом диффузоре с частично подвижной поверхностью [19], показывают, что влияние разрыва граничных условий вверх по потоку локализовано в области длиной порядка толщины пограничного слоя. Хотя эксперименты относятся к турбулентному пограничному слою, по-видимому, аналогичные выводы можно сделать и для ламинарного пограничного слоя.

На фиг. 2 приведены зависимости безразмерного трения $f''_{\eta\eta w}$ от продольной координаты $\xi=0.5(1-\cos \theta)$ (θ — центральный угол) для различ-

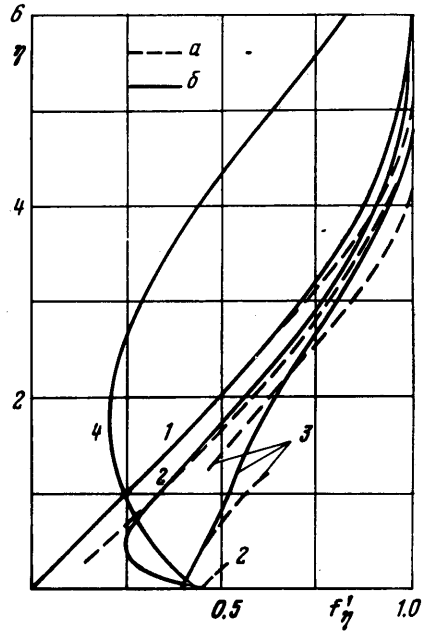
ных значений параметра вдува, полученные при $u_w=0.8U_\infty$ $\xi^\circ=0.25$. Для оценки влияния разрыва u_w вниз по потоку был проведен специальный расчет, в котором разрыв u_w сглаживался следующей функцией:

$$(4.2) \quad u_w=0 \quad (\xi \leq 0.25), \quad u_w=0.8U_\infty [1 - \exp(0.25 - \xi)] \quad (\xi > 0.25)$$

Результат расчета, приведенный на фиг. 2 (линия *a*), показывает, что влияние разрыва граничных условий в значительной степени локализовано в окрестности точки разрыва. Линии *b* на фиг. 2 соответствует асимп-



Фиг. 3



Фиг. 4

тотическое решение во втором приближении, линии *b* — численное решение.

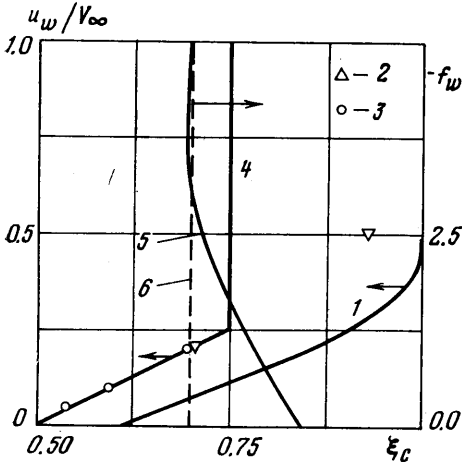
На фиг. 3 приведены характерные профили f'_η поперек пограничного слоя в различных сечениях по ξ ($\xi=0.2, 0.26, 0.4, 0.83, 0.84$ соответствуют линии 1—5), полученные при $f_w=0, u_w=0.8U_\infty$. На фиг. 4 приведены аналогичные профили f'_η поперек пограничного слоя ($u_w=0.8U_\infty, f_w=-3, \xi=0.2, 0.26, 0.4, 0.703$ — линии 1—4 соответственно). Линии *a* — асимптотическое решение (1.3), линии *b* — численное решение.

На фиг. 5 приведена зависимость координаты точки отрыва ξ_c от u_w для различных значений f_w ($f_w=0, -3, -5$ — линии 1—3 соответственно, линия 4 — асимптотическое решение). Из фиг. 5 видно, что координата точки отрыва, получаемая из асимптотического решения, которое в данном случае определяется по формуле

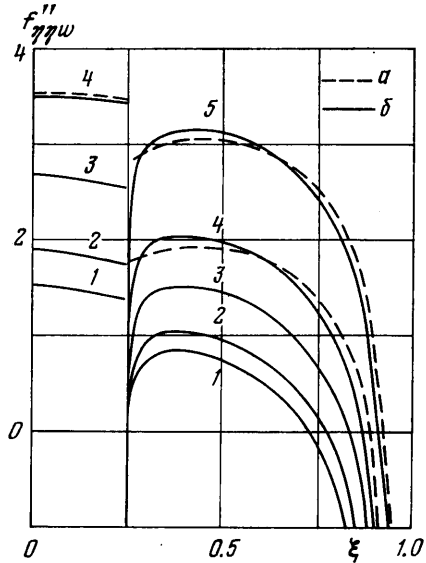
$$(4.3) \quad \xi_c = \min \{ (0.5 + u_w/4U_\infty), (1.0 - \xi^\circ) \}$$

хорошо совпадает с численным решением в случае, когда минимум определяется первым выражением в (4.3), и дает значительно меньшее значение в противном случае. Последнее объясняется тем, что в этом случае линия тока, на которой находится особая точка, выходит из точки разрыва граничных условий, где существенную роль играет слой смешения, в котором скорость u больше, чем на линии тока $t=x^\circ$. В результате точка

отрыва смещается вниз по потоку. На этой же фиг. 5 приведена (линии 5 и 6) зависимость координаты точки отрыва от f_w ($\xi^0=0.25$, $u_w=0.8U_\infty$, $V_\infty=4U_\infty$). Линия 5 — численное решение, линия 6 — асимптотическое. Видно, что при увеличении $-f_w$ координата точки отрыва, полученная из численного решения, стремится к значению, которое дает асимптотическая формула (4.3). При $-f_w \geq 3$ численное решение для координаты точки отрыва совпадает с асимптотическим и с дальнейшим увеличением параметра



Фиг. 5



Фиг. 6

ра вдува практически не изменяется. Таким образом, из численных и асимптотических решений уравнений пограничного слоя следует, что при $u_w > 0$ имеется некоторая конечная область течения с нулевым и положительным градиентом давления, в которой, в отличие от случая $u_w = 0$, уравнения пограничного слоя имеют решение при сколь угодно больших значениях параметра вдува.

На фиг. 6 для различных значений параметра отсоса приведены зависимости безразмерного трения $f''_{\eta\eta\omega}$ от продольной координаты ($f_w = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0$ — линии 1–5 соответственно). Линии *a* — асимптотическое решение с учетом двух приближений, линии *b* — численное решение.

Таким образом, из анализа результатов численного и асимптотического исследования можно сделать вывод, что при значениях параметра $|f_w| \geq 3$ –5 асимптотические решения с удовлетворительной точностью совпадают с численными вне некоторой окрестности точки (линии) разрыва.

Авторы благодарят Г. А. Тирского и Г. Г. Черного за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 30 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
2. Гершбейн Э. А. К асимптотическому решению уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
3. Watson E. T. The asymptotic theory of boundary-layer flow with suction. Aeronaut. Res. Consil. Rep. and Mem., 2619 (1947), 1952.

4. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
5. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
6. Черный Г. Г. Пограничный слой на пластине с подвижной поверхностью. Докл. АН СССР, 1973, т. 243, № 4.
7. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. В сб.: Избранные проблемы прикл. механики. М., ВИНТИ, 1974.
8. Casal P. Sur l'ensemble des solutions de l'équation de la couche limite. J. mécs., 1970, vol. 11, No. 3.
9. Inger G. R., Swean T. F. Vecteded injection into laminar boundary-layers with heat transfer. AIAA Journal, vol. 13, No. 5.
10. Nath G., Muthanna M. Laminar compressible boundary-layers with vecteded mass transfer. AIAA Journal, vol. 14, No. 8.
11. Wolf R. Die laminara kompressible Reibungsschicht an teilweise mitbewegten Wänden. Ing.-Arch., 1968, Bd. 37, H. 3.
12. Tennant J. S. A subsonic diffuser with moving walls for boundary-layer control. AIAA Journal, 1973, Vol. 11, No. 2.
13. Telionis D. P., Werle M. J. Boundary-layer separation from down-stream moving boundaries. Trans. ASME, 1973, vol. 40, No. 2.
14. Степанов Э. А. Ламинарный пограничный слой на пластине при вдуве газа под острым углом к поверхности. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 3.
15. Гиневский А. С., Емельянова Г. Н., Колесников А. В. Турбулентный пограничный слой на подвижной поверхности. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1.
16. Елисеев В. И. О построении многопараметрического решения в области внезапного ускорения ламинарного пограничного слоя. Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 6.
17. Рудерман Я. Л. Ускорение ламинарного пограничного слоя на частично подвижной поверхности. Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., мех., 1976, вып. 6.
18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
19. Tennant J. S., Yang T. Turbulent boundary-layer flow from stationary to moving surfaces. AIAA Journal, vol. 11, No. 8.
20. Левин В. А. Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
21. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
22. Петузов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб.: Числ. методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.