

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СТРУЙНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ НА КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Н. Н. КОРТИКОВ, И. Б. НОВИКОВА

(Ленинград)

Исследуется ламинарная струя несжимаемой жидкости, распространяющаяся вдоль образующей бесконечного кругового цилиндра, при умеренных числах Рейнольдса. Построено асимптотическое решение, учитывающее влияние кривизны поверхности и взаимодействие пограничного слоя с внешним течением. Сравнение с экспериментальными данными показывает применимость полученного решения для $0.8 \cdot 10^3 \leq \text{Re}_x \leq 10^4$.

Описание струйных течений в рамках теории пограничного слоя [1-3] не позволяет выявить влияние эффектов второго порядка: кривизны поверхности и вытеснения пограничного слоя. Это обстоятельство объясняется асимптотическим характером теории пограничного слоя, уравнения которой получены из полной системы уравнения Навье - Стокса, неразрывности и энергии предельным переходом при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Для нахождения поправок второго порядка при умеренных числах Рейнольдса используется метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. Учет эффектов вытеснения пограничного слоя и продольной кривизны поверхности для плоских струйных течений проводился в [5, 6]. В [7] для выявления влияния поперечной кривизны поверхности на растекание ламинарной осесимметричной струи применялся интегральный метод решения уравнений пограничного слоя. Наблюдается большое расхождение с экспериментальными данными работы [8].

В данной работе устанавливается влияние геометрии поверхности и вытеснения пограничного слоя на течение и теплообмен в осесимметричной ламинарной струе на круговом цилиндре при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассматривается задача о распространении осесимметричной ламинарной струи несжимаемой жидкости, истекающей из бесконечно тонкого кольцевого источника в прострэнство, затопленное жидкостью тех же свойств, что и сама струя, вдоль нагретой поверхности кругового цилиндра радиуса R . Температура поверхности цилиндра T_w постоянна и отлична от температуры жидкости T_∞ вдали от цилиндра. Начало координат совместим с источником струи. Ось x направлена вдоль поверхности цилиндра, y — по нормали к ней. Используются безразмерные уравнения: в качестве единицы измерения длины выбирается характерный размер L , проекции скорости на оси x и y отнесены к значению скорости U в сечении с продольной координатой, равной L , давление отнесено к величине ρU^2 (ρ — плотность жидкости в струе), избыточная температура — к $T_w - T_\infty$.

Основные уравнения для безразмерных проекций скорости u и v , давления p и температуры θ при отсутствии вязкостной диссипации имеют вид [2]

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & uu_x + vv_y = -p_x + \text{Re}^{-1} \{ 2u_{xx} + (R+y)^{-1} [(R+y) (v_x + u_y)]_y \} \\
 & uv_x + vv_y = -p_y + \text{Re}^{-1} \{ v_{xx} + u_{xy} + 2(R+y)^{-1} [(R+y) v_y]_y \} \\
 & u\theta_x + v\theta_y = \text{Pr}^{-1} (R+y)^{-1} \{ [(R+y) \theta_x]_x + [(R+y) \theta_y]_y \} \\
 & [u(R+y)]_x + [v(R+y)]_y = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u=v=0, \quad \theta=1, \quad y=0, \quad x>0 \\
 &u=v=0, \quad \theta=0, \quad y=0, \quad x<0 \\
 (1.2) \quad &u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq 0 \\
 &r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} y/x
 \end{aligned}$$

При $Re \rightarrow \infty$ задача (1.1), (1.2) по терминологии [4] — задача сингулярных возмущений. В качестве параметра возмущения используется $\varepsilon = Re^{-1/2}$.

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений область течения разбивается на две: внутреннюю (область пограничного слоя) и внешнюю. Для исследования поведения решения в пограничном слое вводится поперечная координата порядка единицы в области неоднородности

$$(1.3) \quad y = Y\varepsilon$$

Решение в пограничном слое представляется в виде асимптотических разложений для $Re \rightarrow \infty$ при фиксированных x, Y

$$\begin{aligned}
 &u(x, y; Re) = u_0(x, Y) + \varepsilon u_1(x, Y) + \dots \\
 &v(x, y; Re) = \varepsilon v_0(x, Y) + \varepsilon^2 v_1(x, Y) + \dots \\
 (1.4) \quad &p(x, y; Re) = p_0(x, Y) + \varepsilon p_1(x, Y) + \dots \\
 &\theta(x, y; Re) = \theta_0(x, Y) + \varepsilon \theta_1(x, Y) + \dots
 \end{aligned}$$

Вне пограничного слоя решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 &u(x, y; Re) = U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \dots \\
 &v(x, y; Re) = \varepsilon V_0(x, y) + \varepsilon^2 V_1(x, y) + \dots \\
 (1.5) \quad &p(x, y; Re) = P_0(x, y) + \varepsilon P_1(x, y) + \dots \\
 &\theta(x, y; Re) = 0
 \end{aligned}$$

Закон предельного перехода определяет область применимости каждого из разложений (1.4), (1.5).

2. Нулевое приближение. Считая внешнее течение безвихревым, из (1.5) и (1.1) получим для функции тока Φ_0 нулевого приближения внешнего течения

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad &E^2 \Phi_0 = 0, \quad E^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 - (R+y)^{-1} \partial / \partial y \\
 &U_0 = (R+y)^{-1} \Phi_{0y}, \quad V_0 = -(R+y)^{-1} \Phi_{0x}
 \end{aligned}$$

Поскольку граничные условия нулевые, то, не ограничивая общности, имеем

$$(2.2) \quad \Phi_0(x, y) = 0$$

Процедура сращивания определяет граничное условие на внешней границе пограничного слоя

$$(2.3) \quad \psi_{0\gamma}(x, \infty) = 0$$

Нулевое приближение для пограничного слоя описывается системой уравнений, полученных подстановкой (1.4) в (1.1)

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad &\psi_{0\gamma} \psi_{0x\gamma} - \psi_{0x} \psi_{0\gamma\gamma} = \psi_{0\gamma\gamma\gamma}, \quad u_0 = \psi_{0\gamma}, \quad v_0 = -\psi_{0x} \\
 &\psi_{0\gamma} \theta_{0x} - \psi_{0x} \theta_{0\gamma} = Pr^{-1} \theta_{0\gamma\gamma}
 \end{aligned}$$

Система уравнений (2.4) совпадает с известной системой уравнений пограничного слоя и допускает автомодельное решение вида [1-3]

$$(2.5) \quad \psi_0(x, Y) = x^{1/4} F(\eta), \quad \theta_0 = H(\eta), \quad \eta = Yx^{-1/4}$$

Для определения $F(\eta)$ и $H(\eta)$ имеем

$$4F'' + FF'' + 2F'^2 = 0, \quad 4H'' + \text{Pr} FH = 0$$

$$(2.6) \quad F(0) = F'(0) = F'(\infty) = H(\infty) = 0, \quad H(0) = 1, \quad \int_0^{\infty} F'^2 F d\eta = 1$$

На внешней границе пограничного слоя

$$(2.7) \quad F(\eta) \sim F(\infty) + \exp, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Здесь \exp — члены, экспоненциально малые при $\eta \rightarrow \infty$.

3. Первое приближение. Для первого приближения функции тока Φ_1 внешнего течения имеем

$$(3.1) \quad E^2 \Phi_1 = 0$$

Граничные условия определяются из сращивания при использовании (2.7)

$$(3.2) \quad \Phi_1(x, 0) = F_{\infty} x^{1/2}, \quad x > 0; \quad \Phi_1(x, 0) = 0, \quad x < 0$$

Решение задачи (3.1), (3.2) дается в квадратурах

$$(3.3) \quad \Phi_1(x, r) = \frac{1}{\pi} \frac{r}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi, R) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{K_1(\delta r)}{K_1(\delta R)} \cos \delta(\xi - x) d\delta$$

Здесь $r = R + y$, $K_1(\delta r)$ — функция Макдональда [9].

Для вычисления выражения (3.3) применяется приближенная интерполяционная формула, учитывающая поведение функции Макдональда в предельных точках ($\delta = 0, \infty$)

$$(3.4) \quad \frac{K_1(\delta t)}{K_1(\delta)} \cong \exp[-\delta(t-1)] \frac{1}{\sqrt{t}} + \\ + \exp[-1.5\delta(t-1)] \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right), \quad t = r/R$$

Сопоставление результатов расчета по формуле (3.4) с табличными данными [10] показывают, что наибольшее расхождение составляет 7% при $0.2 < \delta < 1.0$.

Решение для первого приближения внешнего течения с учетом формулы (3.5) представляется в виде

$$(3.5) \quad \Phi_1(x, y) = F_{\infty} \sqrt{2} (1 + y/R)^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2} \sin(\pi/4 - \varphi/4) + \\ + F_{\infty} \sqrt{2} (1 - \sqrt{1 + y/R}) [x^2 + \\ + (1.5y)^2]^{1/2} \sin(\pi/4 - \alpha/4) \quad (\alpha = \text{arctg}(1.5y/x))$$

Процедура сращивания определяет граничное условие для первого приближения пограничного слоя

$$(3.6) \quad \psi_{1Y}(x, \infty) = -1/4 F_{\infty} x^{-1/2}, \quad \theta_1(x, \infty) = 0$$

Уравнения и граничные условия для первого приближения пограничного слоя имеют вид

$$(3.7) \quad \psi_{1Y} \psi_{0\alpha Y} + \psi_{0Y} \psi_{1\alpha Y} - \psi_{1\alpha} \psi_{0YY} - \psi_{0\alpha} \psi_{1YY} - \\ - \psi_{1YYY} = R^{-1} (Y \psi_{0YYY} - \psi_{0\alpha} \psi_{0Y} - \psi_{0YY})$$

$$\begin{aligned} \psi_{0Y}\theta_{1x} + \psi_{1Y}\theta_{0x} - \psi_{0x}\theta_{1Y} - \psi_{1x}\theta_{0Y} &= \text{Pr}^{-1} (\theta_{1Y} + YR^{-1}\theta_{0Y} + R^{-1}\theta_{0Y}) \\ u_1 &= \psi_{1Y} - YR^{-1}\psi_{0Y}, \quad v_1 = -\psi_{1x} + YR^{-1}\psi_{0x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\psi_1 = \psi_{1Y} = \theta_1 = 0, \quad Y=0; \quad \psi_{1Y} \rightarrow -1/4 F_\infty x^{-3/4}, \quad \theta_1 \rightarrow 0, \quad Y \rightarrow \infty$$

Уравнения (3.7) и граничные условия (3.8) допускают автомодельное решение

$$(3.9) \quad \psi_1(x, Y) = \frac{x}{R} G(\eta) + f(\eta), \quad \theta_1(x, Y) = \frac{x^{3/4}}{R} g(\eta)$$

Здесь $G(\eta)$ и $g(\eta)$ — функции, обусловленные кривизной цилиндрической поверхности, $f(\eta)$ — толщиной вытеснения пограничного слоя.

Pr	$-H'(0)$	$-g'(0)$	$\frac{g'(0)}{H'(0)}$	$-g'(0)$	$\frac{g'(0)}{H'(0)}$
0.01	0.0061	0.0700	11.4764	0.0727	11.9180
0.10	0.0496	0.3072	6.1939	0.3991	8.0467
0.70	0.1775	0.3745	2.1093	0.4433	2.4967
1.00	0.2080	0.3793	1.8236	0.4415	2.1227
10.00	0.5001	0.5019	1.0036	0.5221	1.0442

Поскольку эффект вытеснения пограничного слоя в первом приближении на цилиндрической поверхности совпадает с соответствующей поправкой для струйного течения на плоской стенке, то значения функции $f(\eta)$ выбираются из [6].

Для определения G и g имеем

$$\begin{aligned} 4G''' + FG'' + F'G' + 4F''G &= -4\eta F''' + 4F'' + F'F - 3\eta F'^2 \\ 4g'' + \text{Pr}(Fg' - 3F'g + 4GH') &= -4\eta H'' - 4H' \\ G(0) = G'(0) = G'(\infty) = g(0) = g(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Необходимо отметить, что вследствие однородности уравнения и граничных условий эффект вытеснения пограничного слоя для теплообмена тождественно равен нулю.

4. Обсуждение. Сравнение с экспериментом. Численные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), (3.10) получены методом сведения краевой задачи к задаче Коши [11] для пяти значений числа Прандтля.

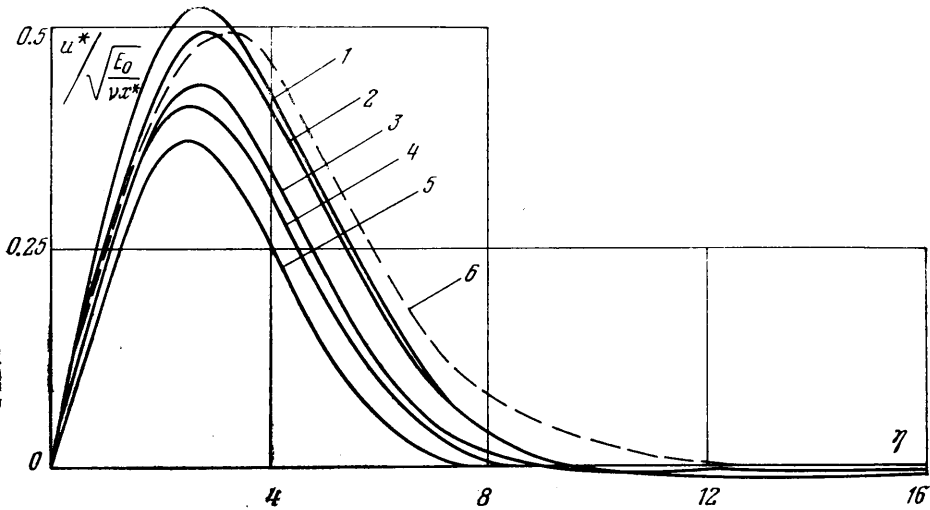
Результаты расчетов, приведенные в таблице, показывают, что относительное влияние высших приближений на теплообмен в струе увеличивается при уменьшении числа Прандтля. В таблице приводятся также результаты расчетов для случая аппроксимации отношения функций Макдональда асимптотическим выражением при больших значениях аргумента. Данная аппроксимация дает небольшую погрешность для значения коэффициента теплоотдачи (последние два столбца таблицы).

В общем случае выражения для напряжения трения и локального коэффициента теплоотдачи по данной теории имеют соответственно вид

$$(4.1) \quad \frac{\tau_w}{\mu \sqrt[4]{E_0^3/x^* \nu^5}} = 0.221 + \frac{1}{R} \sqrt[4]{\frac{x^{*3} \nu^3}{E_0}} \left(0.0233 + 1.1801 \frac{R}{x} \right)$$

$$(4.2) \quad \frac{\text{Nu}_x}{\sqrt[4]{E_0 x^* / \nu}} = -H'(0) \left[1 + \frac{g'(0)}{H'(0)} \sqrt[4]{\frac{x^{*3} \nu^3}{E_0}} \frac{1}{R} \right]$$

Здесь E_0 — величина только численной постоянной отличается от произведения секундного объемного расхода и количества движения для



Фиг. 1

струи на плоской стенке [1], ν — коэффициент кинематической вязкости, x^* — размерная продольная координата.

Выражения для продольной и поперечной составляющих скорости и температуры в пограничном слое записываются в виде

$$(4.3) \quad \frac{u^*}{\sqrt{E_0/\nu x^*}} = F' + \xi^{3/4} \left(G' - \eta F' + \frac{R}{x} f' \right)$$

$$\frac{v^*}{\sqrt[4]{\nu E_0/x^{*3}}} = -(F - 3\eta F') -$$

$$- \xi^{3/4} \left[4G - 3\eta G' - \eta(F - 3\eta F') - \frac{3R}{x} \eta f' \right]$$

$$\theta = H + \xi^{3/4} g, \quad \xi = x\nu/\sqrt[3]{E_0 R^4}$$

Индукцированная вытесняющим действием пограничного слоя поперечная составляющая скорости во внешнем течении определяется следующей формулой:

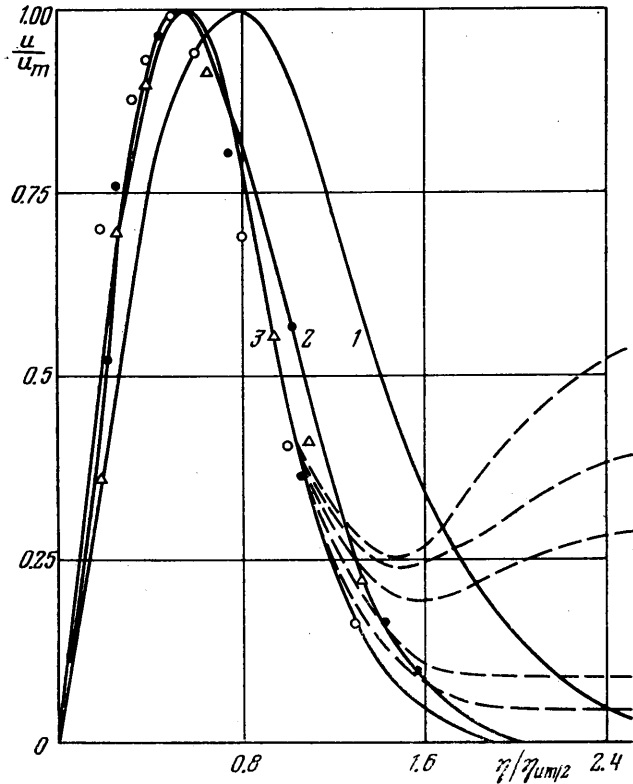
$$(4.4) \quad \frac{v^*}{\sqrt[4]{\nu E_0/x^{*3}}} = 0.886 \sqrt{1 + \eta \xi^{3/4}} \left(1 + \frac{R^2 \eta^2}{x^2} \xi^{3/4} \right) \times$$

$$\times \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{R}{x} \xi^{3/4} \right) + \frac{R}{x} \eta \xi^{3/4} \times \right.$$

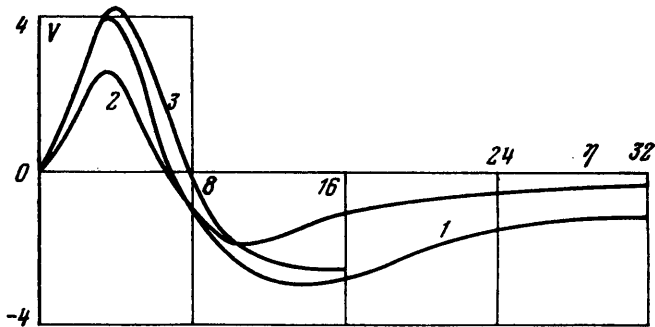
$$\times \left. \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{R}{x} \xi^{3/4} \right) \right] - 0.886 (1 - \sqrt{1 + \eta \xi^{3/4}}) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{9R^2}{4x^2} \xi^{3/4} \eta \right) \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{3R}{2x} \xi^{3/4} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3R}{2x} \eta \xi^{3/4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{3R}{2x} \xi^{3/4} \right) \right]$$



Фиг. 2



Фиг. 3

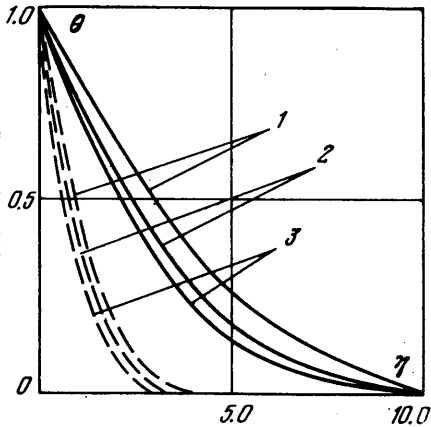
На фиг. 1 представлены безразмерные профили скоростей для различных значений параметра ξ . Видно, что с увеличением ξ (т. е. с увеличением расстояния от источника при постоянных значениях других параметров) максимум скорости падает и сдвигается в сторону цилиндрической стенки, толщина струи уменьшается. Для кривых 1–5 значения ξ равны соответственно 0.011, 0.022, 0.067, 0.092, 0.133, кривая 6 – теория пограничного слоя. С другой стороны, при $R \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow \infty$) максимум скорости стремится к значению максимальной скорости для свободной осесимметричной ламинарной струи.

На фиг. 2 приведен универсальный профиль скорости, рассчитанный по данной теории (кривая 3), по теории пограничного слоя (2), интегральным методом [7] (1), и проводится сопоставление с экспериментальными

данными для трансформаторного масла и цилиндра $R=10^{-2}$ м [8]. Здесь в качестве масштабов для скорости выбирается значение максимальной скорости в данном сечении, а для поперечной координаты — ордината, в которой скорость принимает значение, равное половине максимальной. Хорошее совпадение данной теории с экспериментом указывает на ее применимость в диапазоне чисел Рейнольдса $Re_{x^*}=U_{\infty}x^*/\nu$ от $0.8 \cdot 10^3$ до 10^4 , где U_{∞} — скорость истечения струи из кольцевого источника. Необходимо отметить, что автомоделный профиль, полученный в [1], полнее во внешней области пограничного слоя и расхождение достигает 10%. Применение асимптотической аппроксимации для интеграла (3.3) приводит к большим погрешностям при $\eta/\eta_{1/2} \geq 1.2$ (пунктирные кривые соответствуют параметрам ξ для фиг. 1). С увеличением ξ расхождение с экспериментальными точками увеличивается.

На фиг. 3 представлен профиль поперечной составляющей скорости $V=4\nu[E_0\nu/x^{*3}]^{-1/4}$ в зависимости от параметра ξ . С ростом ξ абсолютные значения скорости уменьшаются вследствие смещения струи с окружающей жидкостью и трения на цилиндрической стенке ($1-\xi=0.011$, $2-0.067$, $3-$ теория пограничного слоя).

Безразмерные профили температур для чисел Прандтля 0.7 (сплошные линии) и 10 (пунктирные линии) представлены на фиг. 4 для значений $\xi=0.1, 0.2, 0.3$ (кривые 1–3 соответственно). С цилиндрической поверхности с увеличением параметра ξ наблюдается более интенсивный теплообмен по сравнению со струей, распространяющейся вдоль плоской стенки [3].



Фиг. 4

Поступила 23 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, № 5.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
3. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
4. Van-Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. N. J., Akad. Press., 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967).
5. Plotkin A. A second-order correction to the Glauert wall jet solution. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 1.
6. Clark A. L., Watson E. J. Displacement and curvature effects in a wall jet. J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, No. 2.
7. Gorla R. S. R. Transverse curvature effect on the flow field in a laminar cylindrical wall jet. J. Fluid Engng, 1976, vol. 98, No. 1.
8. Сакинов З. Б. Экспериментальное исследование полуограниченных струй. В сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 1. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1964.
9. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
10. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. М., Изд-во АН СССР, 1958.
11. Collatz L. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, Springer, 1951. (Рус. перев.: Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1953).