

фронту неравномерно и создает на его поверхности излом. Нечто подобное происходит, вероятно, и в пульсирующей детонации, и это может послужить некоторым доводом в пользу предположения о стимулирующем влиянии пульсаций в детонационном горении.

Автор признателен В. А. Левину и Г. Г. Черному за обсуждение и важные замечания, а Я. К. Трошину за поддержку.

Поступила 20 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов Ю. Н., Трошин Я. К. Пульсирующая и спиновая детонация газовых смесей в трубах. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 1.
2. Щелкин К. И. Два случая неустойчивого горения. ЖЭТФ, 1959, т. 36, № 2.
3. Griffiths R. W., Sandeman R. J., Hornung H. J. The stability of shock waves in ionizing and dissociating gases. J. Phys. D: Appl. Phys., 1976, vol. 9, No. 12.
4. Duff R. E., Knight H. T., Wright H. R. Some detonation properties of acetylene gas. J. Chem. Phys., 1954, vol. 22, No. 9.
5. Щелкин К. И. Неустойчивость горения и детонации газов. Усп. физ. н., 1965, т. 87, № 2.
6. Матвеев Ю. С., Трошин Я. К., Шуленин Ю. В. О регулярной и нерегулярной структуре фронта волны в газовой детонации. Физика горения и взрыва, 1978, т. 14, № 2.
7. Солоухин Р. И., Топчиан М. Е. Исследование шлейфа спиновой детонации. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 4.

УДК 536.24

### О ТЕМПЕРАТУРЕ ПОТОКА В КАНАЛЕ СО СКАЧКОМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СТЕНКЕ

В. С. АСТАВИН, И. О. КОРОЛЕВ, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(Москва)

В работе рассматривается задача о поле температуры в потоке вязкой жидкости в круглой трубе при скачкообразном изменении граничного условия для температуры на стенках в некотором сечении канала. Начиная с классических работ [1, 2], эта задача при различных предположениях о типе потока, виде граничных условий и величинах числа Пекле рассматривалась во многих работах (например, [3, 4, 5]). Полученные до настоящего времени решения часто оказываются громоздкими и не исчерпывают всех представляющих интерес физических ситуаций.

В данной работе найдено решение задачи для случая течения Пуазейля, граничных условий первого рода для температуры и произвольных значений числа Пекле. Установлено выражение, определяющее число Нуссельта в различных сечениях канала. Приведены результаты расчета по полученным формулам.

1. Исследуется распределение температуры в потоке вязкой теплопроводящей жидкости в круглой трубе радиуса  $a'$ , ось которой совпадает с осью  $z'$  цилиндрической системы координат (штрихами в дальнейшем обозначаются размерные величины), профиль скорости потока будем считать пуазейлевским  $v'(r') = v_0'(1 - r'^2/a'^2)$ . Здесь  $v_0'$  — скорость на оси потока; стенки трубы при  $z' < 0$  поддерживаются при постоянной температуре  $T_-'$ , а при  $z' > 0$  — при температуре  $T_+'$ . Уравнение и граничные условия для температуры жидкости в данном случае имеют вид

$$(1.1) \quad (1-r^2) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$r = \frac{r'}{a'}, \quad z = \frac{z'}{a'P}, \quad P = \frac{v_0' a'}{\chi'}$$

$$(1.2) \quad z \rightarrow -\infty, \quad T \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow 1$$

$$(1.3) \quad z < 0, \quad r = 0, \quad \partial T / \partial r = 0, \quad r = 1, \quad T = 0$$

$$(1.4) \quad z > 0, \quad r = 0, \quad \partial T / \partial r = 0, \quad r = 1, \quad T = 1$$

Здесь  $\chi'$  — коэффициент температуропроводности жидкости;  $P$  — число Пекле.  
 2. Введем вместо непрерывной функции  $T(r, z)$  разрывную при  $z=0$  функцию  $T_1(r, z)$

$$(2.1) \quad T_1(r, z) = T(r, z), \quad z < 0; \quad T_1(r, z) = T(r, z) - 1, \quad z > 0$$

Для  $T_1(r, z)$  задача (1.1) — (1.4) принимает вид

$$(2.2) \quad (1-r^2) \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad z \neq 0$$

$$(2.3) \quad z \rightarrow \pm \infty, \quad T_1 \rightarrow 0$$

$$(2.4) \quad z \neq 0, \quad r=0, \quad \partial T_1 / \partial r = 0, \quad r=1, \quad T_1 = 0$$

$$(2.5) \quad T_1(r, -0) - T_1(r, +0) = 1, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, -0) = \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, +0)$$

Функция  $T_1(r, z)$  абсолютно интегрируема по  $z$  при  $-\infty < z < \infty$ , так что существует преобразование Фурье по  $z$  функции  $T_1(r, z)$

$$(2.6) \quad T_1^*(r, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} T_1(r, z) dz$$

Предполагается, что интегралы по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  от функций  $\partial T_1 / \partial r$  и  $\partial^2 T_1 / \partial r^2$  сходятся равномерно по  $r$  в любом замкнутом промежутке, включенном в промежуток (0,1). Тогда для  $T_1^*(r, \xi)$  из (2.1) — (2.5) можно получить

$$(2.7) \quad \frac{d^2 T_1^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1^*}{dr} + i\xi \left[ (1-r^2) + \frac{i\xi}{P^2} \right] T_1^* = (1-r^2) + \frac{i\xi}{P^2}$$

$$(2.8) \quad r=0, \quad dT_1^* / dr = 0, \quad r=1, \quad T_1^* = 0$$

3. Решение задачи (2.7) — (2.8) имеет вид

$$(3.1) \quad T_1^*(r, \xi) = \frac{1}{i\xi} \left[ 1 - \frac{{}_1F_1((2-\sqrt{i\xi}-P^{-2}(i\xi)^{1/2})/4, 1, \sqrt{i\xi}r^2) \exp(-\sqrt{i\xi}r^2/2)}{{}_1F_1((2-\sqrt{i\xi}-P^{-2}(i\xi)^{1/2})/4, 1, \sqrt{i\xi}) \exp(-\sqrt{i\xi}/2)} \right]$$

Здесь и далее  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция [6], выражение  $\sqrt{s}$  следует понимать как однозначную функцию, совпадающую на верхнем берегу разреза вдоль вещественной положительной полуоси с арифметическим значением корня.

Распределение температуры в потоке  $T_1(r, z)$  определяется обратным преобразованием Фурье функции  $T_1^*(r, \xi)$

$$(3.2) \quad T_1(r, z) = V.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z} T_1^*(r, \xi) d\xi, \quad V.p. \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right)$$

С учетом формулы (3.1) из (3.2) получим

$$(3.3) \quad T_1(r, z) = V.p. \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-sz}}{s} \left[ 1 - \frac{{}_1F_1((2-\sqrt{s}-s^{1/2}P^{-2})/4, 1, \sqrt{s}r^2) \exp(-\sqrt{s}r^2/2)}{{}_1F_1((2-\sqrt{s}-s^{1/2}P^{-2})/4, 1, \sqrt{s}) \exp(-\sqrt{s}/2)} \right] ds, \quad s = i\xi$$

Таким образом, решение задачи (2.2)–(2.5) представляется формулой (3.3).

Из интегрального представления (3.3) могут быть получены формулы для распределения температуры в области  $z < 0$  и  $z > 0$ . Из анализа поведения подынтегрального выражения (3.3) при  $z < 0$  найдем

$$(3.4) \quad T_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z} R_n(r)$$

$$(3.5) \quad R_n(r) = {}_1F_1((2 - i\sqrt{\lambda_n} + iP^{-2}\lambda_n^{3/2})/4, 1, i\sqrt{\lambda_n}r^2) \exp(-i\sqrt{\lambda_n}r^2/2)$$

$$(3.6) \quad A_n = -\lambda_n^{-1} [\partial H / \partial x]_{x=\lambda_n}^{-1}$$

$$H(x) = {}_1F_1((2 - i\sqrt{x} + iP^{-2}x^{3/2})/4, 1, i\sqrt{x}r^2) \exp(-i\sqrt{x}/2)$$

Здесь  $\lambda_n$  – корни уравнения  $H(\lambda_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Отметим, что функция  $H(x)$  имеет интегральное представление

$$(3.7) \quad H(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi\sqrt{x}}{4} \left( 1 - \frac{x}{P^2} \right) \right] \times \\ \times \int_0^1 \cos \left[ \frac{\sqrt{x}}{2}(1-2s) + \frac{\sqrt{x}}{4} \left( 1 - \frac{x}{P^2} \right) \ln \frac{s}{1-s} \right] \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

Коэффициенты  $A_n$  и радиальные функции  $R_n(r)$  также могут быть представлены в интегральной форме

$$(3.8) \quad A_n = \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{4\pi} \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi\sqrt{\lambda_n}}{4} \left( 1 - \frac{\lambda_n}{P^2} \right) \right] \int_0^1 \left[ (1-2s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3\lambda_n}{P^2} \right) \ln \frac{s}{1-s} \right] \sin \left[ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}(1-2s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{4} \left( 1 - \frac{\lambda_n}{P^2} \right) \ln \frac{s}{1-s} \right] \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} \right\}^{-1}$$

$$(3.9) \quad R_n(r) = \frac{1}{\pi} \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi\sqrt{\lambda_n}}{4} \left( 1 - \frac{\lambda_n}{P^2} \right) \right] \times \\ \times \int_0^1 \cos \left[ \frac{\sqrt{\lambda_n}r^2}{2}(1-2s) + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{4} \left( 1 - \frac{\lambda_n}{P^2} \right) \ln \frac{s}{1-s} \right] \frac{dS}{\sqrt{s(1-s)}}$$

Аналогично из (3.3) при  $z > 0$  получим

$$(3.10) \quad T_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n z} Q_n(r)$$

$$(3.11) \quad Q_n(r) = {}_1F_1((2 - \sqrt{\mu_n} - P^{-2}\mu_n^{3/2})/4, 1, \sqrt{\mu_n}r^2) \exp(-\sqrt{\mu_n}r^2/2)$$

$$B_n = \mu_n^{-1} [\partial H_1 / \partial x]_{x=\mu_n}^{-1}$$

$$H_1(x) = {}_1F_1((2 - \sqrt{x} - P^{-2}x^{3/2})/4, 1, \sqrt{x}r^2) \exp(-\sqrt{x}/2)$$

Интегральные представления для  $H_1(x)$ ,  $B_n$  и  $Q_n(r)$  имеют вид

$$(3.12) \quad H_1(x) = \frac{4 \exp(\sqrt{x}/2)}{\Gamma((2 + \sqrt{x} + P^{-2}x^{3/2})/4)} \int_0^\infty e^{-s^4} s^{1 + \sqrt{x} + P^{-2}x^{3/2}} J_0(2\sqrt{x}s^2) ds$$

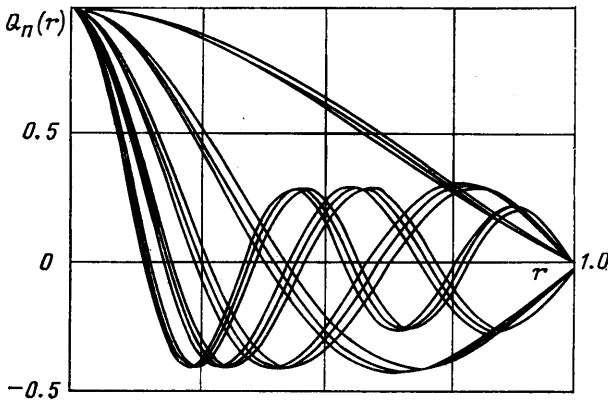
$$(3.12) \quad B_n = \left\{ \frac{2\sqrt{\mu_n} \exp(\sqrt{\mu_n}/2)}{\Gamma((2 + \sqrt{\mu_n} + P^{-2}\mu_n^{3/2})/4)} \int_0^\infty e^{-s^4} s^{1 + \sqrt{\mu_n} + P^{-2}\mu_n^{3/2}} \times \right.$$

$$\times \left[ \left(1 + \frac{3\mu_n}{P^2}\right) J_0(2\sqrt{\mu_n}s^2) \ln s - \frac{s^2}{\sqrt{\mu_n}} J_1(2\sqrt{\mu_n}s^2) \right] ds \Big\}^{-1}$$

$$(3.13) \quad Q_n(r) = \frac{4 \exp(\sqrt{\mu_n} r^2)}{\Gamma((2 + \sqrt{\mu_n} + P^{-2}\mu_n^{3/2})/4)} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-s^4} s^{1 + \sqrt{\mu_n} + P^{-2}\mu_n^{3/2}} J_0(2\sqrt{\mu_n}rs^2) ds$$

Соотношения (3.4) – (3.13) определяют аналитическое решение задачи о распределении температуры в потоке. Для иллюстрации на фиг. 1 показано поведение нескольких первых радиальных функций  $Q_n(r)$  для значений  $n=1, 2, 3, 4, 5$  и  $P=$



Фиг. 1

$=1, 5, 10$ . Распределение температуры для  $P=1, 5, 10$  (пары кривых 1, 2, 3) в сечении  $z=0.2$  (нижние кривые) и  $z=0.4$  (верхние кривые) представлено на фиг. 2.

Решение (3.4) – (3.13) представлено в виде рядов функций от разделенных переменных  $r$  и  $z$ , коэффициенты рядов представлены квадратурами от известных функций. Следует отметить, что в других работах, в которых также используются интегральные преобразования (например, [3]), решение представляется в виде рядов, коэффициенты которых не определяются в явном виде, а должны находиться из бесконечной системы алгебраических уравнений.

4. Воспользовавшись полученными результатами, определим теплообмен потока со стенками. Введем по формуле число Нуссельта

$$(4.1) \quad Nu(z, P) = \frac{2(\partial T/\partial r)_{r=1}}{1 - T^0(z)}, \quad T^0(z) = 4 \int_0^1 r(1-r^2) T(r, z) dr$$

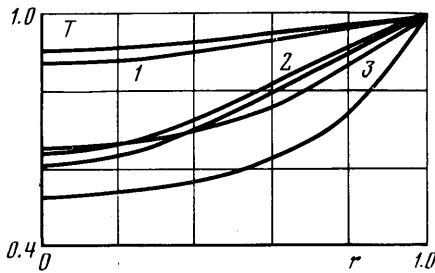
Здесь  $T^0$  – средняя по сечению температура потока.

Опуская промежуточные вычисления, получим

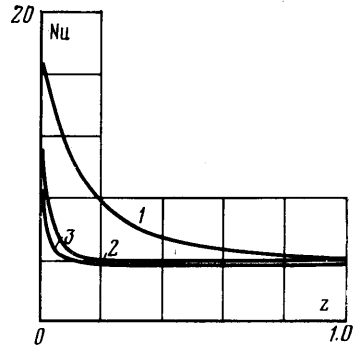
$$(4.2) \quad \text{Nu}(z, P) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n z} \right) / \left( \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\mu_n z} \right)$$

$$C_n = -\frac{1}{2} B_n Q_n'(1), \quad D_n = B_n \int_0^1 r(1-r^2) Q_n(r) dr$$

Зависимость  $\text{Nu}(z, P)$  для значений  $P=1, 5, 10$  представлена на фиг. 3 (кривые 1, 2, 3 соответственно).



Фиг. 2



Фиг. 3

В заключение отметим, что аналогично могут быть рассмотрены задачи о теплообмене в трубах с другим профилем скоростей потока, о теплообмене в плоском канале. Очевидно, что формулы (3.4) — (3.13) нетрудно записать для более общего случая граничного условия третьего рода.

Поступила 8 VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Graetz L. Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten. Annln. Phys., 1883, Bd 18, S. 79–84.
2. Nusselt W. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge. VDI Zeitschrift, 1910, Bd 54, N 28.
3. Hsu C.-J. An exact analysis of low peclet number thermal entry region heat transfer in transversely nonuniform velocity fields. A. I. Ch. E. Journal, 1971, vol. 17, No. 3.
4. Deavours C. A. Laminar heat transfer in parallel plate flow. Appl. Sci. Res., 1974, vol. 29, No. 1.
5. Jerri A. J., Davis E. J. Application of the sampling theorem to boundary value problems. J. Eng. Math., 1974, vol. 8, No. 1.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.