УДК 532.582.031

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ПОГРУЖЕНИЕ НАКЛОНЕННОГО ТОНКОГО СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

А. В. КУЗНЕЦОВ, А. Ш. МАНЕВИЧ

(Казань)

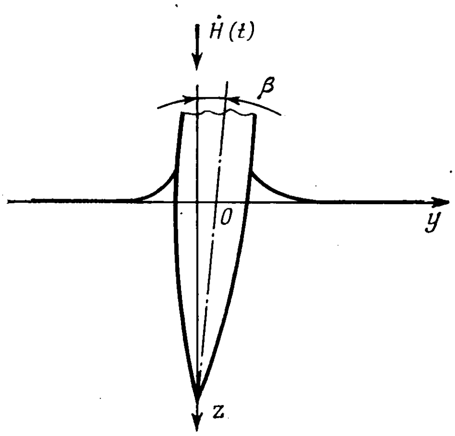
Рассмотрена задача вертикального проникания симметричного профиля под малым углом атаки в сжимаемую жидкость с постоянной дозвуковой скоростью. Для решения применен метод конических течений. Приведены решения задач проникания пластинки и несимметричного клина.

Пусть тонкое жесткое тело вертикально проникает в сжимаемую жидкость, занимающую нижнее полупространство (фиг. 1). Начало неподвижной системы координат поместим в точку соприкосновения профиля с невозмущенной свободной поверхностью, ось z направим вертикально вниз, ось y – вдоль свободной границы. Уравнения правой и левой образующих профиля обозначим соответственно через $y=h[H(t)-z]$ и $y=g[H(t)-z]$, где t – время, $H(t)$ – закон погружения носика профиля. Потенциал, а также компоненты скорости такого течения удовлетворяют волновому уравнению [1]

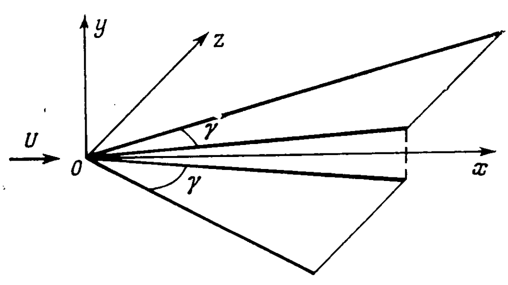
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1}$$

и условию $\varphi=0$ на свободной границе $z=0$; давление определяется из линеаризованного уравнения Коши – Лагранжа $p=-\rho\partial\varphi/\partial t$, где p – разность между давлениями в жидкости и на свободной границе, ρ – плотность жидкости в начальный момент времени.

Задача вертикального проникания в сжимаемую жидкость несимметричного профиля разбивается в силу линейности на две [1]: задачу проникания симметричного



Фиг. 1



Фиг. 2

профиля $y=\pm{}^1/_2(h-g)$ и задачу проникания искривленного тела нулевой толщины с уравнением $y={}^1/_2(h+g)$ (срединной линии исходного профиля). Решение первой задачи можно получить, применяя метод запаздывающего потенциала. Оно имеет вид [1]

$$\varphi(z,y,t)=-\frac{a}{\pi}\iint\limits_S\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,0,\tau)\frac{d\xi\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(z-\xi)^2-y^2}} \tag{2}$$

где S – область плоскости (ξ,τ), ограниченная линиями $\xi=\pm H(\tau)$ – траекторией носика и ее зеркальным отражением и гиперболой $\tau=t-[(z-\xi)^2+y^2]^{1/2}/a$, $\tau>0$.

Если проникание сверхзвуковое, то эта формула дает решение и для второй задачи, так как в этом случае $\partial\varphi/\partial y=0$ при $|z|>H(t)$, $y=0$. Если же проникание дозвуковое, то на участках $H(t)<z<at$, $-at<z<-H(t)$ оси z функция $\partial\varphi/\partial y$ неизвестна и ее нужно найти из условия $\varphi=0$. Естественно вновь воспользоваться формулой (2) и получить из нее интегральное уравнение для $\partial\varphi/\partial y$. Однако исследование и решение интегрального уравнения вызывает значительные трудности, что становится понятным, если обратить внимание на тождественность задачи проникания с дозвуковой скоростью профиля нулевой толщины задаче сверхзвукового обтекания крыла с дозвуковыми передними кромками $z=\pm H(x)$ установившимся потоком со скоростью U. Эта тождественность определяется формулами перехода $\varphi\to\varphi$, $z\to z$, $y\to y$, $t\to x$, $1/a^2\to\mu^2=U^2/a^2-1$, где (x, y, z) – система координат, связанная с крылом. К настоящему времени эффективные методы решения разработаны лишь для крыльев со сверхзвуковыми передними кромками [2].

В то же время отмеченная аналогия позволяет для задачи вертикального проникания с постоянной скоростью v_0 симметричного профиля под малым углом атаки β получить решение в замкнутом виде, так как соответствующая вторая задача тождественна задаче обтекания плоского асимметричного треугольного крыла (фиг. 2) с углом стреловидности $\gamma=\operatorname{arc\,tg} v_0$, целиком расположенного внутри конуса Маха. Очевидно, что эта последняя задача является автомодельной, и для решения ее можно использовать метод конических течений.

Так как для конических течений компоненты скорости зависят лишь от отношений $\xi=z/x$, $\eta=y/x$, то достаточно решить задачу для какой-нибудь плоскости, перпендикулярной основному потоку. При помощи преобразования $r=\mu\sqrt{\xi^2+\eta^2}=2\varepsilon/(1+\varepsilon^2)$, $\sigma=\operatorname{arc\,tg}(\eta/\xi)$ волновое уравнение (1) в области $z^2+y^2<x^2/\mu^2$, которому удовлетворяют компоненты скорости и потенциал, приводится к уравнению Лапласа в полярных координатах внутри круга единичного радиуса плоскости $\tau=\varepsilon e^{i\sigma}$ [3]

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial v_x}{\partial\varepsilon}\right)+\frac{\partial^2 v_x}{\partial\sigma^2}=0$$

а крыло в плоскости τ изобразится отрезком действительной оси от $-b$ до b, где b определяется из равенства $\operatorname{tg}\gamma=2b/[\mu(1+b^2)]$.

Таким образом, v_x можно рассматривать как действительную часть некоторой функции комплексного переменного $v_x=\operatorname{Re}(f(\tau)/\mu)$. Обозначим мнимую часть этой функции через q, тогда $f(\tau)=\mu(v_x+iq)$ – аналитическая функция переменной $\tau=\varepsilon e^{i\sigma}$. Задача определения v_x сводится к отысканию функции $f(\tau)$, а знание компоненты скорости v_x позволяет интегрированием определить две другие компоненты [3]

$$\omega=v_z+iv_y=-\frac{1}{2}\int\left[\tau\,df+\frac{1}{\bar\tau}\,d\bar f\right] \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что функция $f(\tau)$ конформно отображает полукруг единичного радиуса в плоскости τ на полуплоскость с полубесконечным разрезом по мнимой оси в плоскости $\zeta=v_x+iq$. Такая функция имеет вид

$$f(\tau)=\frac{B\tau}{\sqrt{(b^2-\tau^2)(b^{-2}-\tau^2)}}+iD \tag{4}$$

где B и D – неизвестные постоянные. Вследствие того что q определяется с точностью до произвольной постоянной, можно положить $D=0$, а постоянную B определить из условия $v_y=\pm v_0\beta$ на участке $-b<\tau<b$. Из (3) имеем

$$v_y=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\left[\tau\,df+\frac{1}{\bar\tau}\,d\bar f\right] \tag{5}$$

Подынтегральная функция имеет в точке $\tau=0$ полюс первого порядка, а на окружности $\varepsilon=1$ $v_y=0$ (так как возмущения вне конуса Маха отсутствуют), поэтому интегрирование (5) ведем по мнимому радиусу от $\varepsilon=1$ до $\varepsilon=\Delta$, где $\Delta\to0$, а далее по четверти окружности от $\sigma=\pi/2$ до $\sigma=\pi$, тогда

$$v_y=-v_0\beta=-\frac{1}{2}\lim_{\tau\to0}\operatorname{Im}\int_C\left[\tau\,df+\frac{1}{\bar\tau}\,d\bar f\right]=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}B\frac{\pi i}{2}$$

Отсюда

$$B=4v_0\beta/\pi \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$v_x=\frac{4v_0\beta}{\pi\mu}\operatorname{Re}\frac{\tau}{\sqrt{(b^2-\tau^2)(b^{-2}-\tau^2)}}$$

На той части поверхности крыла, которой соответствует участок $0<\tau<b$, имеем

$$v_x=\frac{4v_0\beta\varepsilon}{\pi\mu\sqrt{(b^2-\varepsilon^2)(b^{-2}-\varepsilon^2)}}=\frac{2v_0\beta z \operatorname{tg}\gamma}{\pi\sqrt{x^2\operatorname{tg}^2\gamma-z^2}} \tag{7}$$

Таким образом, для сверхзвукового обтекания асимметричного стреловидного крыла компонента скорости v_x определена. Следовательно, принимая во внимание указанную выше аналогию, из формулы (7) получаем закон распределения давления на пластинке, проникающей с дозвуковой скоростью в сжимаемую жидкость: $p=\pm 2\rho v_0^2\beta\lambda(M^2-\lambda^2)^{-1/2}/\pi$, $\lambda=z/at$, где плюс соответствует давлению на наветренной, а знак минус на подветренной сторонах пластинки. Боковая сила, действующая на пластинку, и момент относительно передней кромки соответственно равны

$$\begin{gathered}Y=2\int\limits_0^{v_0t}p(z,t)\,dz=\frac{4\rho v_0^3\beta}{\pi}t\\ L=2\int\limits_0^{v_0t}p(z,t)(v_0t-z)\,dz=\frac{4\rho v_0^4\beta}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)t^2\end{gathered} \tag{8}$$

Кроме того, на пластинку вертикально вниз действует подсасывающая сила R, обусловленная тем, что в передней кромке вследствие обращения в ней в бесконечность компонент скорости и $\partial\varphi/\partial t$, появляется бесконечное разряжение. Вычислим R с помощью метода, использованного в [3].

Применим теорему количества движения к объему жидкости, ограниченному окружностью c малого радиуса с центром в передней кромке $z=v_0t$ и отрезком профиля l. Тогда в проекциях на ось z

$$\begin{gathered}R+\int\limits_c p\cos(nz)\,ds=\operatorname{Im}\frac{\partial K}{\partial t}-\int\limits_{c+l}\rho v_z v_n\,ds\\ K=\iint\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dz\,dy=\int\limits_{c+l}\rho\varphi(dy-idz)\\ \operatorname{Im}\frac{\partial K}{\partial t}=-\int\limits_{c+l}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)\,dz\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь K – количество движения жидкости внутри круга c. Из уравнения Коши – Лагранжа, сохраняя члены не выше второго порядка, получаем

$$\begin{gathered}p=-\rho_0\left[\frac{v_y^2+v_z^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2a_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]\\ \rho=\rho_0\left\{1-\frac{1}{a_0^2}\left[\frac{v_y^2+v_z^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{2-\varkappa}{2a_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]\right\}\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $\varkappa$ – показатель адиабаты, а индекс 0 обозначает параметры невозмущенной жидкости, в дальнейшем его опускаем.

Преобразуем (9), учитывая (10) и сохраняя члены не выше второго порядка малости по β, тогда

$$\begin{gathered}R=\rho\int\limits_c\left\{\left[\frac{v_y^2}{2}-\frac{v_z^2}{2}+\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]\cos(nz)-v_yv_z\cos(ny)\right\}ds-\\ -\rho\int\limits_l\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+v_z^2\right]\cos(nz)+v_yv_z\cos(ny)\right\}ds\end{gathered} \tag{11}$$

Для вычисления R вводим полярные координаты δ_1, ϑ_1 с центром в передней кромке $z=v_0t$. В окрестности точки $\tau=b$, соответствующей передней кромке, функцию $f(\tau)$ можно представить в виде $f(\tau)=A(b-\tau)^{-1/2}+O(1)$, $A=Bb^{3/2}(1-b^4)^{-1/2}$. Следовательно согласно (3) в окрестности точки $\varepsilon=b$ $\omega(\tau)=-{}^1/_2[bf+b^{-1}\bar{f}]+O(1)$. Вводя полярные координаты δ, ϑ в плоскости τ с центром в точке b, получим

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{A}{\sqrt{\delta}}\cos\frac{\vartheta}{2},\quad v_y=-\frac{A(1-b^2)}{2b\sqrt{\delta}}\sin\frac{\vartheta}{2},\quad v_z=-\frac{A(1+b^2)}{2b\sqrt{\delta}}\cos\frac{\vartheta}{2}$$

Интегралом по контуру l в формуле (11) пренебрегаем, поскольку он имеет более высокий порядок малости по β, чем интеграл по окружности c. Учитывая соотношения [3]

$$\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{2a}{(1+b^2)m}\sqrt{\cos^2\vartheta+m^2\sin^2\vartheta},\quad \operatorname{tg}\vartheta_1=m\operatorname{tg}\vartheta$$

$$d\vartheta_1=\frac{m\,d\vartheta}{\cos^2\vartheta+m^2\sin^2\vartheta}\qquad \frac{1}{m}=\sqrt{1-M^2}=\frac{1-b^2}{1+b^2}$$

и полагая $\delta\to0$, из (11) находим

$$R=-\frac{2\sqrt{1-M^2}}{\pi}\rho v_0^3\beta^2t$$

Имея теперь решение задачи проникания пластинки в сжимаемую жидкость, можно, воспользовавшись результатами задачи симметричного проникания профиля [1], построить решение задачи вертикального проникания симметричного профиля под углом атаки β. В частности, для дозвукового проникания несимметричного клина давление на гранях

$$p_{1,2}=\frac{\rho v_0^2(\alpha_1+\alpha_2)}{2\pi\sqrt{1-M^2}}\ln\frac{M\sqrt{1-\lambda^2}+\lambda\sqrt{1-M^2}}{M\sqrt{1-\lambda^2}-\lambda\sqrt{1-M^2}}\pm\frac{\rho v_0^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\pi\sqrt{M^2-\lambda^2}}\lambda,\qquad \lambda=\frac{z}{at}$$

где плюс соответствует грани $y=\alpha_1(v_0t-z)$, минус – грани $y=-\alpha_2(v_0t-z)$. Сопротивление клина $X=F+R$, где F – сопротивление, обусловленное давлением жидкости на грани клина, а R – подсасывающая сила

$$F=\rho v_0^3(\alpha_1+\alpha_2)^2\frac{\ln(1+\sqrt{1-M^2})}{\pi\sqrt{1-M^2}}t+\frac{\rho v_0^3}{\pi}(\alpha_1-\alpha_2)^2t$$

$$R=-\frac{\sqrt{1-M^2}}{2\pi}\rho v_0^3(\alpha_1-\alpha_2)^2t$$

Как видно, величины F и R имеют одинаковый порядок малости. Боковая сила и момент относительно носика клина соответственно равны

$$Y=\frac{2\rho v_0^3}{\pi}(\alpha_1-\alpha_2)t,\quad L=\frac{2\rho v_0^4}{\pi}(\alpha_1-\alpha_2)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)t^2$$

Отсюда при $M\to0$ следуют полученные в [4] формулы для вертикального проникания несимметричного клина в несжимаемую жидкость.

Поступила 7 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974.
2. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.– Л., Гостехтеоретиздат, 1952.
3. *Франкль Ф. И., Карпович Е. А.* Газодинамика тонких тел. М.– Л., Гостехтеоретиздат, 1948.
4. *Терентьев А. Г.* Наклонный вход тонкого тела в несжимаемую жидкость. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.