Автор признательна В. П. Карликову за постоянное внимание к работе, Г. Ю. Степанову – за ценные принципиальные указания, связанные с качественным анализом решения, и Ю. Л. Якимову – за участие в обсуждении результатов работы.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штанько В. А.* О струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток. Тр. НИИ прикл. матем. и механ. при Томск. ун-те, 1976, т. 7.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., Наука, 1976.
3. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

УДК 532.529

О СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО, ПОМЕЩЕННОЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ХИЛ-ШОУ

Л. И. ЗАЙЧИК

(Москва)

В работе [1] определена сила сопротивления, действующая на круглый газовый пузырь, помещенный между двумя параллельными пластинами, при медленном обтекании вязкой жидкостью. В данной статье задача, рассмотренная в [1], решена для тела произвольной формы в предположении выполнения условий течения Хил-Шоу. Получена формула для силы сопротивления, в которую входит только один коэффициент разложения комплексного потенциала в ряд Лорана.

При медленном безотрывном обтекании тела, расположенного между двумя пластинами, и выполнении условий $h \ll L$ и $U_\infty \rho h^2/\mu L \ll 1$ (L – характерный размер обтекаемого тела, h – расстояние между пластинами, U_∞ – скорость набегающего потока, ρ – плотность, μ – вязкость) линии тока на некотором расстоянии от поверхности (порядка h) будут такими же, как и при двумерном потенциальном течении [2]. В этом случае компоненты скорости в плоскости, параллельной пластинам, могут быть представлены в виде [2]

$$u_x(x,y,z)=\frac{6z(h-z)\,u_{x0}(x,y)}{h^2},\qquad u_y(x,y,z)=\frac{6z(h-z)\,u_{y0}(x,y)}{h^2}$$

$$u_{x0}=-\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad u_{y0}=-\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{\partial u_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial u_{y0}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

Здесь оси x и y расположены в плоскости, параллельной пластинам, а ось z направлена перпендикулярно к пластинам; $u_{x0}(x, y)$, $u_{y0}(x, y)$ – распределение скоростей при двумерном потенциальном обтекании рассматриваемого тела; p – давление.

Введем комплексный потенциал $w=\varphi+i\psi$, где функция давления $\varphi=-ph^2 12\mu$ и функция тока ψ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=\Delta\psi=0$$

$$u_{x0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad u_{y0}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2}$$

Сила сопротивления, действующая на помещенное между пластинами тело, складывается из силы давления и силы трения

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_p+\mathbf{F}_f=-\int_0^h\oint_\sigma p\mathbf{n}\,d\tau\,dz-\mu\int_0^h\oint_\sigma\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n}\boldsymbol{\tau}-2\frac{\partial u_n}{\partial n}\mathbf{n}\right)d\tau\,dz \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – орт внешней нормали к поверхности σ; $\boldsymbol{\tau}$ – касательный орт; u_n, u_τ – нормальная и касательная к поверхности тела компоненты скорости.

Вначале вычислим силу давления, для чего введем комплексные переменные в плоскости $\xi=x+iy$ [3]

$$F_p=F_x+iF_y,\quad n=-ie^{i\theta},\quad d\sigma=e^{-i\theta}d\xi$$

где θ – угол между элементом контура $d\sigma$ и осью x.

Переходя к комплексному представлению, получим

$$F_x+iF_y=ih\oint_\sigma p\,d\sigma=-\frac{12i\mu}{h}\oint_\sigma \varphi\,d\xi=-\frac{12i\mu}{h}\oint_\sigma w\,d\xi \tag{4}$$

Переход в (4) от функции давления φ к комплексному потенциалу w возможен вследствие того, что на поверхности обтекаемого тела функция тока принимает постоянное значение $\psi=C$ и, следовательно

$$\oint_\sigma \psi\,d\xi=C\oint_\sigma d\xi=0$$

Представляя далее потенциал w при бесциркуляционном обтекании в виде ряда Лорана

$$w=U_\infty\left(\xi+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{An}{\xi^n}\right) \tag{5}$$

получим следующее выражение для силы давления

$$F_p=24\pi\mu U_\infty A_1 h^{-1} \tag{6}$$

Как видно из (6), сила давления зависит только от коэффициента A_1 в разложении (5).

Теперь сравним по порядку величин вклад сил давления и трения в силу сопротивления (3). Из соображений размерности следует, что $A_1\sim L^2$, а для силы трения легко получить следующую оценку

$$F_f\sim\mu U_\infty\sigma\sim\mu U_\infty L$$

Поэтому

$$\frac{F_f}{F_p}\sim\frac{\mu U_\infty Lh}{\mu U_\infty L^2}\sim\frac{h}{L}\ll 1$$

Таким образом, сила сопротивления при медленном обтекании тела, расположенного между параллельными пластинами, определяется выражением

$$F=24\pi\mu U_\infty A_1 h^{-1}+O(h/L) \tag{7}$$

Формула (7) справедлива как для твердых тел, так и для газовых пузырей, так как различие в граничных условиях, связанное с физическим состоянием обтекаемой поверхности, приводит только к изменению силы трения и, следовательно, дает вклад в член $O(h/L)$.

В качестве примера вычислим силу сопротивления при обтекании эллиптического цилиндра с полуосями a и b, причем ось a расположена вдоль направления скорости U_∞. Тогда, согласно [3],

$$w=\frac{U_\infty}{a-b}\left(a\xi-b\xi\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{\xi^2}}\right)$$

Откуда $A_1=b(a+b)/2$ и, следовательно,

$$F=12\pi\mu U_\infty b(a+b)h^{-1} \tag{8}$$

В частном случае круглого цилиндра $a=b=R$ из (8) имеем

$$F=24\pi\mu U_\infty R^2h^{-1}=16\pi\mu U_m R^2 h^{-1} \tag{9}$$

где $U_m=3U_\infty/2$ – максимальная скорость течения ($z=h/2$) вдали от тела.

Формула (9) совпадает с выражением для силы сопротивления при обтекании круглого пузыря, полученным в работе [1].

Поступила 23 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Ю. И., Скоробогатов Н. Г., Сосунов В. И.* Сопротивление жидкости движению газового пузыря, сдавленного параллельными стенками. ПМТФ, 1971, № 1.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.