

Подставим выражение в круглых скобках из первого уравнения (2.1), а функцию q подберем так, чтобы все члены с F исчезли из (2.3). Это приводит к следующему уравнению для $q(\xi)$: $b_1 q + b_2 = \xi dq/d\xi$, откуда с учетом выражений для b_1 , b_2 , ξ легко получить

$$q = -u_e \int_{x_0}^x \frac{\beta_2}{x u_e} dx = u_e \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x \frac{dx}{u_e}$$

При таком выборе функции q для φ_1 получается уравнение

$$\varphi_1'' + s\varphi_1' = 2\xi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$$

т. е. первое уравнение (2.1) при $b_1 = 0$.

Полученные результаты показывают, что все выводы работы [5] о различии экспоненциально и алгебраически затухающего решения, а также о правомочности переноса граничных условий из бесконечности на конечное расстояние от стенки без изменения переносятся на трехмерное течение.

Проанализируем вклад различных членов в выражении для φ . φ_1 описывает развитие начального вторичного течения, заданного при $\xi = \xi_0$. Если $\varphi|_{\xi=\xi_0} = 0$, то $\varphi_1 = 0$. Член qF описывает порождение под влиянием поперечного градиента давления вторичного течения из основного.

Посмотрим теперь, что происходит при изменении кривизны линий тока внешнего потока (β_2 меняет знак при $\xi = \xi_1$). Течение вблизи стенки очень чутко реагирует на изменение градиента давления (например, $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ при $t=0$ равна $-\beta_2$). Поэтому направление вторичного течения вблизи стенки довольно быстро меняет знак вслед за градиентом давления. Во внешней же части пограничного слоя φ зависит от β_2 интегрально, поэтому знак величины φ там слабее следит за знаком градиента скорости. Эти результаты могут быть использованы для задания профиля вторичного течения при создании интегральных методов расчета трехмерного пограничного слоя при переменной кривизне линий тока внешнего потока.

Поступила 21 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. Башкин В. А. Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 5.
3. Белянин Н. М. Определение величины критерия отрыва трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
4. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
5. Шальман Е. Ю. Асимптотические решения неавтомодельных уравнений пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 6.
6. Дуайер. Решение задачи о трехмерном пограничном слое при наличии отрыва. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7.

УДК 532.528

О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНКИ С ИСТОЧНИКОМ

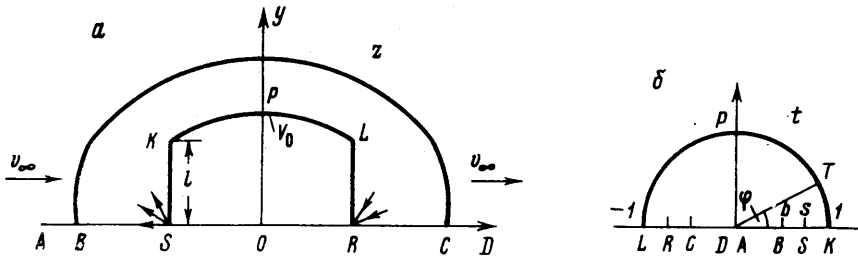
Т. Г. МУШИНА

(Москва)

Исследуется задача о симметричном обтекании пластинки с источником потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости. Установлено существование в рамках принятой схемы предельного значения мощности источника. Изучен характер течения при мощности источника, близкой к предельной. Проведен численный анализ решения на ЭВМ, результаты которого представлены графическими зависимостями размеров каверны от мощности источника для различных чисел кавитации.

Исследуется задача о кавитационном обтекании пластинки по схеме Рябушинского безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости. На пластинке размера l находятся источник и сток мощности Q в точках S и R соответственно, как показано на фиг. 1, а. Скорость натекающего потока равна v_∞ , а скорость на границе каверны — v_0 . Установлено существование в рамках принятой схемы предельного значения мощности источника, зависящего от числа кавитации σ , при котором длина каверны становится бесконечно большой. Изучен характер течения при мощности источника, близкой к предельной. Обтекание пластинки с источником при нулевом числе кавитации рассматривалось в [1]. Интерес к подобным задачам вызван предложенным в [2] обращением потока при установившемся обтекании тела с возвратной струей.

Комплексный потенциал течения обозначается через $W(z)$, безразмерная комплексная скорость $(dW/dz)/v_0$ — через ξ . Область изменения вспомогательного пере-



Фиг. 1

менного t выбирается в виде верхнего единичного полуокруга (фиг. 1, б) и на нее конформно отображаются области изменения функций dW/dt и ξ

$$(1) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{K (t^2 - b^2) (t^2 - b^{-2}) (1 - t^2)}{t^2 (t^2 - s^2) (t^2 - s^{-2})}$$

$$\xi = \frac{s}{b^2} \frac{t^2 - b^2}{t^2 - b^{-2}} \sqrt{\frac{t^2 - s^{-2}}{t^2 - s^2}}$$

$$K = \frac{2Q}{\pi} \frac{b^2 s (1 + s^2)}{(s^2 - b^2) (1 - s^2 b^2)}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \leq s < 1, \quad b^2 = \frac{s}{\sqrt{1 + \sigma}}$$

Конформность отображения $\xi(t)$ нарушается в точках A и D , а также в точках, удовлетворяющих условию

$$(2) \quad t^2 = \frac{3b^4 - 1 - s^4(3 - b^4) \pm \sqrt{\Delta}}{2[b^2(1 - s^4) - 2s^2(1 - b^4)]}$$

$$\Delta = [3b^4 - 1 - s^4(3 - b^4)]^2 - 4[b^2(1 - s^4) - 2s^2(1 - b^4)]^2.$$

Возможны три случая.

1. $\Delta = 0$, $t^2 = 1$, $b^2 = (3s^2 - 1)/(3 - s^2)^{-1}$. Конформность отображения $\xi(t)$ нарушается в точках A и D , а также в точках K и L ; область изменения годографа скорости ξ показана на фиг. 2, а. Мощность источника в этом случае равна q_0 , а соответствующее значение s_0 как функция σ есть корень уравнения

$$s_0^3 + 3\sqrt{1 + \sigma} s_0^2 - 3s_0 - \sqrt{1 + \sigma} = 0$$

2. $\Delta < 0$. Конформность нарушается в точках T и T' , лежащих на свободной поверхности (фиг. 2, б).

3. $\Delta > 0$. Точки нарушения конформности расположены на пластинке (фиг. 2, в). С помощью формул (1) получаются соотношения для относительной длины и ширины каверны и для относительной мощности источника

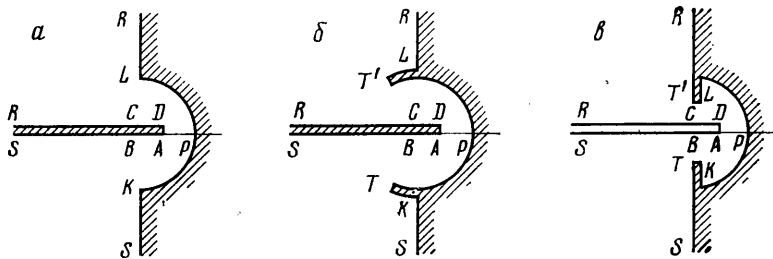
$$\lambda = \frac{x_p}{l} = \frac{I_2}{2I_1}, \quad d = \frac{y_p}{l} = 1 + \frac{I_3}{I_1}$$

$$q = \frac{Q}{lv_\infty} = \frac{\pi}{b^2 s} \frac{(1+\sigma)(s^2-b^2)(1-s^2b^2)}{(1+s^2)I_1}$$

$$I_1 = \int_s^1 \frac{(b^{-2}-t^2)^2(1-t^2)}{t^2\sqrt{(t^2-s^2)(s^2-t^2)^3}} dt, \quad I_3 = \frac{s^3}{b^4} \left[2 - \frac{(1+b^2)^2}{1+s^2} \right]$$

$$I_2 = \frac{2s^3}{b^4} \int_0^{\pi/2} \frac{(b^4+s^2)\cos 4\varphi - (1+s^2)(1+b^2)^2 \cos 2\varphi + s^2b^4 + 2b^2(1+s^2) + 1}{(1+s^4-2s^2 \cos 2\varphi)^{3/2}} d\varphi$$

В решении имеются два параметра — s и σ . Мощность источника q из (3) также зависит от s и σ . Таким образом, параметр s характеризует мощность источника.



Фиг. 2

В предельном случае $s=(1+\sigma)^{-1/2}$ параметр $b=s$, т. е. критическая точка B лежит на пластинке, а мощность источника q стремится, согласно (3), к нулю. Получается кавитационное обтекание пластинки без источника по схеме Рябушинского. Точка $s=1$ является особой для интегралов I_1 и I_2 . В этом случае точкам S, K, T (фиг. 1, а) области течения соответствует в параметрической плоскости точка $t=1$. Из анализа асимптотического поведения функций, входящих в решение, при $s \rightarrow 1$ получаются предельные значения для I_1 и, соответственно, для мощности источника в виде

$$\lim_{s \rightarrow 1} I_1 = \frac{\pi-2}{4} \sqrt{1+\sigma-1}, \quad q^* = \lim_{s \rightarrow 1} q = \frac{\pi}{\pi-2} \sqrt{1+\sigma}$$

Оценивая предельные значения интегралов I_2 и I_3 , имеем

$$I_2 \rightarrow \infty (s \rightarrow 1), \quad \lim_{s \rightarrow 1} I_3 = \frac{1}{2} [3\sigma + 2(1 - \sqrt{1+\sigma})]$$

Следовательно, для каждого σ существует максимальное значение мощности источника q^* , при стремлении к которому расстояние между пластинками стремится к бесконечности, а диаметр каверны

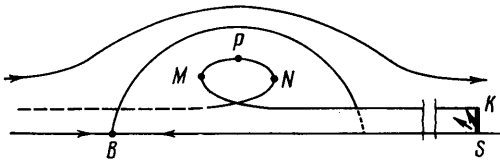
$$d^* = 1 + \frac{2}{\pi-2} \left[\frac{3\sqrt{1+\sigma}+1}{\sqrt{1+\sigma}-1} \right]$$

При увеличении расхода источника от 0 до q^* на пластинке сначала появляется точка T , в которой скорость имеет значение, меньшее, чем скорость на границе каверны. Затем эта точка достигает края пластинки. Дальнейшее увеличение мощности источника заставляет линии тока, сходящие с пластинки, изгибаться навстречу потоку. Таким образом, начиная с некоторого значения мощности $q=q_0$, на границе каверны появляется точка перегиба. Ее параметрическая координата t находится по формуле (2), откуда следует, что $t \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 1$. В этом предельном случае точка перегиба T удаляется от пластинки, и ее ордината становится равной $y_T^* = l[1/2 + 1/(\pi-2)]$.

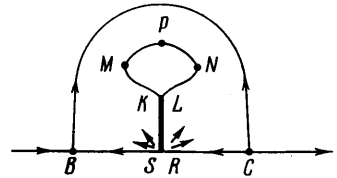
Угол наклона скорости в точке T при этом стремится к π , а ордината точки M границы каверны (фиг. 3), где касательная к границе вертикальна, — к величине

$$y_{M^*} = l \left[2y_{T^*} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi-2} \frac{(\sqrt{1+\sigma}+1)}{\sqrt{2+\sigma}} \right]$$

Таким образом, при стремлении расхода к максимальному значению точка перегиба удаляется от пластинки в бесконечность, и получающееся в пределе течение

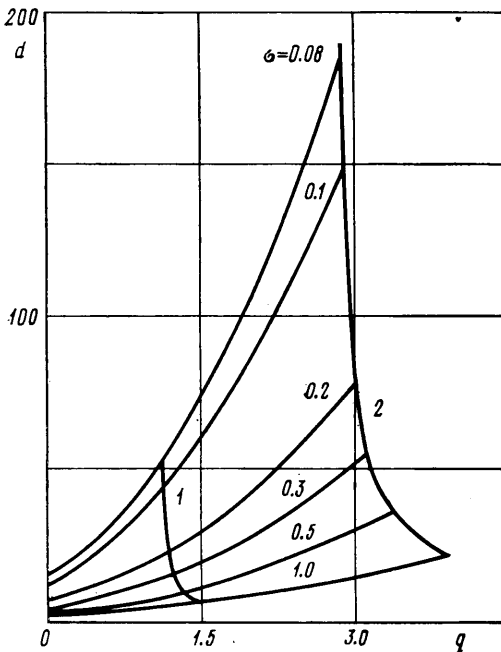


Фиг. 3

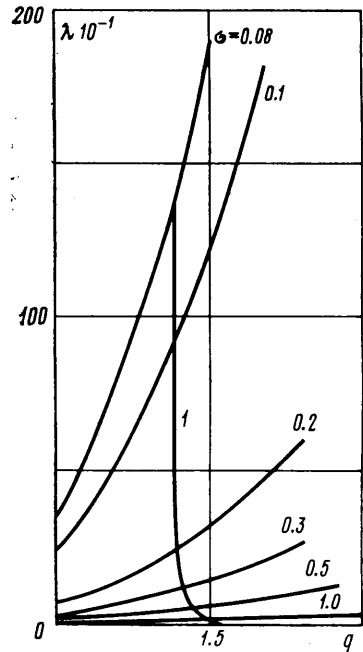


Фиг. 4

вблизи пластинки можно рассматривать как свободную струю от источника на пластинке с шириной, стремящейся к $2y_{T^*}$. Общий вид этого течения показан на фиг. 3 в правой части. На фиг. 3 слева показано предельное течение в окрестности критической точки B . Оно соответствует обобщению известной задачи о проникании струи в безграничную жидкость [3] на случай $\sigma > 0$. Обратим внимание на то, что



Фиг. 5



Фиг. 6

при $q > q_0$ общепринятое определение длины каверны как расстояния между пластинками $2\lambda l$ нуждается в корректировке. Естественнее считать длиной каверны расстояние между точками M и N . Это расстояние при $\sigma > 0$ всегда конечно и положительно, в то время как величина $2\lambda l$ может быть равной нулю (фиг. 4) и становится отрицательной в двулистном течении при $q \rightarrow q^*$ (фиг. 3).

Результаты численного анализа решения задачи представлены на фиг. 5, 6, где построены зависимости размеров каверны от мощности источника для различных чисел кавитации σ , меняющихся в диапазоне 0.08–1.00. На каждой кривой нанесена точка, соответствующая монотонному изменению аргумента скорости на струях при $q = q_0$ (кривая 1). Кривая 2 на фиг. 5 дает зависимость максимальной ширины каверны d^* от значения максимальной мощности источника $q = q^*$ при различных числах кавитации σ .

Автор признательна В. П. Карликову за постоянное внимание к работе, Г. Ю. Степанову — за ценные принципиальные указания, связанные с качественным анализом решения, и Ю. Л. Якимову — за участие в обсуждении результатов работы.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Штанько В. А. О струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток. Тр. НИИ прикл. матем. и механ. при Томск. ун-те, 1976, т. 7.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., Наука, 1976.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

УДК 532.529

О СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО, ПОМЕЩЕННОЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ХИЛ-ШОУ

Л. И. ЗАЙЧИК

(Москва)

В работе [1] определена сила сопротивления, действующая на круглый газовый пузырек, помещенный между двумя параллельными пластинами, при медленном обтекании вязкой жидкостью. В данной статье задача, рассмотренная в [1], решена для тела произвольной формы в предположении выполнения условий течения Хил-Шоу. Получена формула для силы сопротивления, в которую входит только один коэффициент разложения комплексного потенциала в ряд Лорана.

При медленном безотрывном обтекании тела, расположенного между двумя пластинами, и выполнении условий $h \ll L$ и $U_\infty \rho h^2 / \mu L \ll 1$ (L — характерный размер обтекаемого тела, h — расстояние между пластинами, U_∞ — скорость набегающего потока, ρ — плотность, μ — вязкость) линии тока на некотором расстоянии от поверхности (порядка h) будут такими же, как и при двумерном потенциальном течении [2]. В этом случае компоненты скорости в плоскости, параллельной пластинам, могут быть представлены в виде [2]

$$(1) \quad \begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \frac{6z(h-z)u_{x0}(x, y)}{h^2}, & u_y(x, y, z) &= \frac{6z(h-z)u_{y0}(x, y)}{h^2} \\ u_{x0} &= -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, & u_{y0} &= -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, & \frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь оси x и y расположены в плоскости, параллельной пластинам, а ось z направлена перпендикулярно к пластинам; $u_{x0}(x, y)$, $u_{y0}(x, y)$ — распределение скоростей при двумерном потенциальном обтекании рассматриваемого тела; p — давление.

Введем комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$, где φ — функция давления $\varphi = -p h^2 / 12\mu$ и функция тока ψ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi = \Delta \psi = 0 \\ u_{x0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \quad u_{y0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Сила сопротивления, действующая на помещенное между пластинами тело, складывается из силы давления и силы трения

$$(3) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_j = - \int_0^h \oint_\sigma p n d\tau dz - \mu \int_0^h \oint_\sigma \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} \boldsymbol{\tau} - 2 \frac{\partial u_n}{\partial n} \mathbf{n} \right) d\tau dz$$

где \mathbf{n} — орт внешней нормали к поверхности σ ; $\boldsymbol{\tau}$ — касательный орт; u_n , u_τ — нормальная и касательная к поверхности тела компоненты скорости.

Вначале вычислим силу давления, для чего введем комплексные переменные в плоскости $\xi = x + iy$ [3]

$$F_p = F_x + iF_y, \quad n = -ie^{i\theta}, \quad d\sigma = e^{-i\theta} d\xi$$

где θ — угол между элементом контура $d\sigma$ и осью x .