Время расчета одного варианта на ЭВМ БЭСМ-6 не превышало 1.5 *час*. В заключение авторы благодарят С. И. Шматова за проведение ряда расчетов.

Поступила 20 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Храмов Н. Е.* Расчет взаимодействия осесимметричной сверхзвуковой (недорасширенной) струи с преградой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. *Дубинская Н. В., Иванов М. Я.* К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи идеального газа с плоской преградой, перпендикулярной ее оси. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
3. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
4. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
5. *Губанова О. И., Лунев В. В., Пластинина Л. И.* О центральной срывной зоне при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
6. *Мельникова М. Ф., Нестеров Ю. Н.* Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 5.

УДК 532.526.2-3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Е. Ю. ШАЛЬМАН

(Москва)

Асимптотические решения автомодельных уравнений двух- и трехмерного пограничного слоя исследовались многими авторами (см., например, [1-3]). В работах [4, 5] найдены асимптотические решения неавтомодельных уравнений для двумерного течения, проанализирован характер распространения возмущений вблизи внешней границы пограничного слоя.

В данной работе получены асимптотические решения неавтомодельных уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Показано, что вывод работы [5] о правомерности переноса граничных условий из бесконечности на конечное расстояние от стенки верен и для трехмерного течения. Полученные решения позволяют объяснить хорошо известное из эксперимента явление «консервативности вторичных токов». Суть его состоит в том, что при изменении знака поперечного (по нормали к линии тока внешнего потока) градиента давления направление вторичного течения вблизи стенки меняется очень быстро, тогда как в верхних слоях пограничного слоя оно довольно долго остается прежним.

1. Выберем следующую систему координат: ось x направим вдоль линии тока внешнего невязкого потока, ось y – по нормали к обтекаемой поверхности, ось z – перпендикулярно осям x и y. Введем переменную $t=u_e y/\sqrt{x\nu}$ и искомые функции $f=u/u_e$, $\varphi=w/u_e$ (u, v, w – компоненты скорости по осям x, y, z соответственно, u_e – скорость внешнего потока). Скорость v исключим, проинтегрировав уравнение неразрывности. В результате получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+V\frac{\partial f}{\partial t}+\beta_1(1-f^2-\varphi^2)=x\left(f\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+V\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\beta_2(1-f^2-\varphi^2)=x\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)
\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\Psi=\int_0^t f\,dt,\qquad \Phi=\int_0^t \varphi\,dt,\qquad \beta_1=\frac{x}{u_e}\frac{\partial u_e}{\partial x},\qquad \beta_2=\frac{x}{u_e}\frac{\partial u_e}{\partial z}$$

$$V=(0.5+\beta_1)\Psi+\beta_2\Phi+x\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$f=\varphi=0,\quad (t=0);\quad f\to1,\quad \varphi\to0\quad (t\to\infty) \tag{1.2}$$

Введем $F=1-f$ и оценим члены в уравнении (1.1) при $t\gg1$. Из условий (1.2) следует, что $F\ll1$, $\varphi\ll1$, $\Psi\gg\Phi$, $\Psi\gg\partial\Phi/\partial z$ (последние оценки следуют из того, что $\Psi\to\infty$ при $t\to\infty$, тогда как Φ ограничено). Следовательно, последними двумя членами в выражении для V можно пренебречь в сравнении с первым. Тогда после линеаризации из (1.1) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2F}{\partial t^2}+(0.5+\beta_1)\Psi\frac{\partial F}{\partial t}-2\beta_1F=x\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+(0.5+\beta_1)\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}+2\beta_2F=x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\end{gathered} \tag{1.3}$$

В результате первое уравнение не зависит от φ, и в обоих уравнениях отсутствуют производные по z. Следовательно, задача свелась к интегрированию уравнения, аналогичного получающемуся в двумерном случае, и последующего нахождения решения для φ.

2. Чтобы свести первое из уравнений (1.3) к виду, исследованному в [5], перейдем от переменных x, t к переменным $\xi=g(x)$ и $s=\Psi/p(x)$. Тогда первое уравнение системы (1.3) запишется в виде

$$F''+\left[(0.5+\beta_1)p^2+xp\frac{dp}{dx}\right]sF'-2\beta_1p^2F=x\frac{dg}{dx}p^2\frac{\partial F}{\partial\xi}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по s). Функции p и g выберем так, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось единице, а коэффициент при $\partial F/\partial\xi$ равнялся 2ξ. С учетом выражения для β_1 первое условие приводит к уравнению

$$\frac{d(p^2xu_e)}{dx}=2u_e^2,\qquad p(0)=1$$

Откуда

$$p^2=2\left(\int_0^x u_e^2\,dx\right)\bigg/(xu_e^2),\qquad g=\exp\left(2\int_0^x\frac{dx}{xp^2}\right)$$

Обозначим еще $b_1=\beta_1p^2$, $b_2=\beta_2p^2$. В результате система (1.3) перейдет в

$$F''+sF'-2b_1F=2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi},\qquad \varphi''+s\varphi'+2b_2F=2\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{2.1}$$

Граничные условия для (2.1) задаются следующим образом:

$$F=F_*(\xi),\quad \varphi=\varphi_*(\xi)\quad (s=s_*);\quad F\to0,\ \varphi\to0\quad (s\to\infty) \tag{2.2}$$

Условия при $s=s_*$ получаются из склейки асимптотических решений с решениями уравнений (1.1) при $0\leqslant s\leqslant s_*$. Кроме того, для (2.1) задаются начальные условия при $\xi=\xi_0$. Если течение начинается с передней кромки пластины, то $\xi_0=0$, $\varphi\equiv0$, а F – профиль Блазиуса [6].

Решение первого из уравнений (2.1) подробно исследовано в [5]. Функцию φ будем искать в виде: $\varphi=q(\xi)F+\varphi_1$. Подстановка этого разложения во второе уравнение (2.1) дает

$$q\left(F''+sF'-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)+\varphi_1''+s\varphi_1'+2b_2F=2\xi\left(F\frac{dq}{d\xi}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right)$$

Подставим выражение в круглых скобках из первого уравнения (2.1), а функцию q подберем так, чтобы все члены с F исчезли из (2.3). Это приводит к следующему уравнению для $q(\xi)$: $b_1 q + b_2 = \xi dq/d\xi$, откуда с учетом выражений для b_1, b_2, ξ легко получить

$$q = -u_e \int_{x_0}^{x} \frac{\beta_2}{x u_e} dx = u_e \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{u_e}$$

При таком выборе функции q для φ_1 получается уравнение

$$\varphi_1'' + s\varphi_1' = 2\xi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$$

т. е. первое уравнение (2.1) при $b_1 \equiv 0$.

Полученные результаты показывают, что все выводы работы [5] о различии экспоненциально и алгебраически затухающего решения, а также о правомерности переноса граничных условий из бесконечности на конечное расстояние от стенки без изменения переносятся на трехмерное течение.

Проанализируем вклад различных членов в выражении для φ. φ_1 описывает развитие начального вторичного течения, заданного при $\xi = \xi_0$. Если $\varphi|_{\xi=\xi_0} = 0$, то $\varphi_1 \equiv 0$. Член qF описывает порождение под влиянием поперечного градиента давления вторичного течения из основного.

Посмотрим теперь, что происходит при изменении кривизны линий тока внешнего потока (β_2 меняет знак при $\xi = \xi_1$). Течение вблизи стенки очень чутко реагирует на изменение градиента давления (например, $\partial^2\varphi/\partial t^2$ при $t=0$ равна $-\beta_2$). Поэтому направление вторичного течения вблизи стенки довольно быстро меняет знак вслед за градиентом давления. Во внешней же части пограничного слоя φ зависит от β_2 интегрально, поэтому знак величины φ там слабее следит за знаком градиента скорости. Эти результаты могут быть использованы для задания профиля вторичного течения при создании интегральных методов расчета трехмерного пограничного слоя при переменной кривизне линий тока внешнего потока.

Поступила 21 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. *Башкин В. А.* Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
3. *Белянин Н. М.* Определение величины критерия отрыва трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
4. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
5. *Шальман Е. Ю.* Асимптотические решения неавтомодельных уравнений пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 6.
6. *Дуайер.* Решение задачи о трехмерном пограничном слое при наличии отрыва. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7.

УДК 532.528

О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНКИ С ИСТОЧНИКОМ

Т. Г. МУХИНА

(Москва)

Исследуется задача о симметричном обтекании пластинки с источником потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости. Установлено существование в рамках принятой схемы предельного значения мощности источника. Изучен характер течения при мощности источника, близкой к предельной. Проведен численный анализ решения на ЭВМ, результаты которого представлены графическими зависимостями размеров каверны от мощности источника для различных чисел кавитации.