

прямого кругового конуса с вершиной на оси симметрии. Предварительная закрутка, например $\omega_0=2$, ведет к отклонению поверхности струи от оси вращения вблизи сопла, а вдали от него форма струи близка к форме струи, вытекающей при $\alpha_0=\pi/3$ и тех же самых значениях параметров. Сопоставление расчетов при $\alpha_0=0$ и $\alpha_0=\pi/3$ показывает, что в первом случае при одних и тех же значениях $\omega_0=0, 2, 4$ и других параметров отклонение поверхности струи от оси вращения меньше.

5. Непосредственной проверкой можно убедиться, что первый интеграл уравнения (1.7) имеет вид

$$(5.1) \quad (Y - We^\circ u) \cos \alpha - Eu Y^2/2 = A, \quad Fr^\circ = 0$$

Здесь A — постоянная интегрирования.

Выражение (5.1) аналогично первому интегралу в частном случае незакрученных струй (формула (11) работы [2], где $u=1$).

Автору известно, что независимый вывод уравнений, описывающих формы закрученных кольцевых струй, был выполнен в 1968 г. Ю. Н. Каллистовым, рассмотревшим теоретически и экспериментально случаи сильной и слабой закруток. А. Н. Хомяков указал автору первый интеграл уравнений движения для тангенциальной скорости при наличии силы тяжести.

Подробное исследование кольцевых струй без предварительной закрутки и сравнение с экспериментом выполнено в статье [6].

Сформулируем результаты работы. При наличии закрутки отсутствуют смыкающиеся струи. В результате вычислений получены формы струй с критическим сечением, где тангенциальная составляющая скорости уменьшается до нулевого значения; струи волнообразной формы, а также струи с самопересечением. Во всех рассмотренных случаях тангенциальная составляющая скорости жидкого элемента увеличивается при удалении от оси вращения и уменьшается при течении по направлению к оси, против поля центробежных сил. Выводы, касающиеся течений незакрученных струй, соответствуют данным [6].

В заключение автор выражает благодарность В. Я. Шкадову за внимание к работе.

Поступила 4 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф. О форме жидкой пленки, создаваемой центробежной форсункой. Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1960, № 2.
2. Епизин В. Е. О формах кольцевых струй капельной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1977.
5. Taylor G. I. The dynamics of thin sheets of fluid III. Disintegration of fluid sheets. Proc. Soc. London 1959, ser. A, vol. 253, No. 1274.
6. Казеннов А. К., Каллистов Ю. Н., Карликов В. П., Шоломович Г. И. Исследование тонких кольцевых струй несжимаемой жидкости. Научн. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1970, № 1.

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНОГО УСКОРЕНИЯ В УРАВНЕНИИ СТОКСА НА ВЕЛИЧИНУ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

Е. П. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

(Москва)

Высокие скорости скольжения в узлах трения, а также использование в качестве смазки воды приводят к постановке задачи о влиянии инерционных сил на развитие несущей способности слоя смазки. Ряд авторов [1-6] посвятили свои работы учету конвективных членов уравнения Навье — Стокса при определении давления в жидкостном слое смазки подшипника. При этом отмечается [6] возрастание несущей способности смазочного слоя на 20% при $Re=5000$.

В настоящей работе показывается эквивалентность конвективных членов инерции уравнения Навье — Стокса квадрату давления, касательных напряжений и вихря. На основе выведенного уравнения определяется в первом приближении вклад инерционных сил в несущую способность слоя смазки высокоскоростного подшипника скольжения.

1. Рассмотрим уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вектор скорости частиц жидкости, $\mathbf{F}$ — массовая сила, p — гидродинамическое давление в слое смазки, ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, $\mu = \nu \rho$.

Возьмем операцию div от обеих частей равенства (1.1) и, так как $\text{div } \mathbf{V} = 0$, получим

$$(1.2) \quad (\nabla \nabla) \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla^2 p$$

Левая часть уравнения (1.2) с точностью до множителя μ эквивалентна равенству [7, 8]

$$(1.3) \quad 2\mu \Omega^2 - E$$

$$\Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2, \quad E = \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

Здесь Ω — вектор вихря, E — энергия диссипации в единицу времени.

Для вязкой жидкости компоненты тензора напряжений сплошной среды связаны с компонентами тензора скоростей деформации соотношением

$$(1.4) \quad p_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Выражения давления, линейного и квадратичного инвариантов через напряжения имеют вид

$$(1.5) \quad p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p, \quad p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = I_1$$

$$(1.6) \quad -p_{xx}p_{yy} - p_{yy}p_{zz} - p_{zz}p_{xx} + p_{xy}^2 + p_{yz}^2 + p_{xz}^2 = I_2$$

Если воспользоваться формулами (1.4) — (1.6), то (1.3) примет вид

$$(1.7) \quad 4\mu^2 \Omega^2 - (3p^2 + I_2)$$

Возьмем за оси координат направления, совпадающие с направлениями главных осей напряжений в рассматриваемой точке, т. е. положим $p_{xy} = p_{yz} = p_{xz} = 0$, $p_{xx} = p_x$, $p_{yy} = p_y$, $p_{zz} = p_z$, тогда выражение (1.6) упростится $I_2 = p_x p_y + p_y p_z + p_z p_x$.

Представим I_2 в виде $1/3(I_1^2 - I_2')$, где $I_2' = 1/6[(p_x - p_y)^2 + (p_y - p_z)^2 + (p_z - p_x)^2]$ — второй квадратичный инвариант девиатора напряжений.

Так как оси координат направлены вдоль главных напряжений, то в образующемся трехграннике экстремальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений [7, 9]

$$\tau_z = (p_x - p_y)/2, \quad \tau_x = (p_y - p_z)/2, \quad \tau_y = (p_z - p_x)/2$$

Обозначая $\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau^2$ и переходя от I_1 к p , перепишем (1.7) и вместе с ним уравнение (1.2) в виде

$$(1.8) \quad \frac{1}{\mu_2} (3p^2 - 1/3 \tau^2) - 2\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \nabla^2 p - \text{div } \mathbf{F}$$

2. Воспользуемся уравнением (1.8) для определения давления в жидкостном слое смазки подшипника. Рассмотрим задачу в цилиндрической системе координат при допущении, аналогичном допущению работы [10]. Именно полагаем: $\partial p / \partial r = 0$, $v_r \ll v_\phi$, v_z ; $\text{div } \mathbf{F} = 0$; координата поверхности слоя пленки, отсчитываемая от шипа радиуса R , дается формулой (фиг. 1)

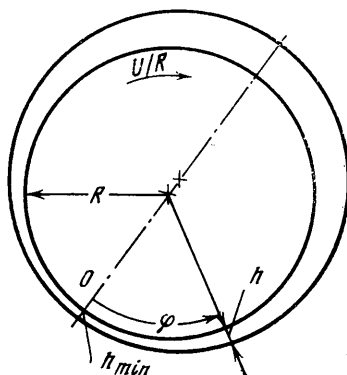
$$h = \delta(1 - \chi \cos \varphi) \quad (0 \leq r \leq h)$$

где δ — разность радиусов шипа и подшипника; χ — относительный эксцентриситет. При этих допущениях уравнение (1.8) имеет вид

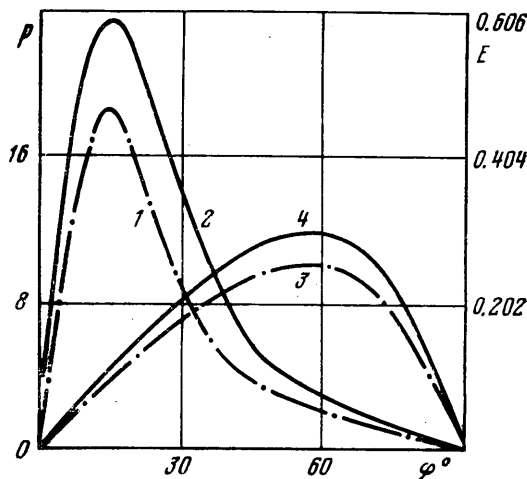
$$(2.1) \quad \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^2 \theta_n \cos n\varphi \right]^{-1} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu^2} (3p^2 - 1/3 \tau^2) - 2\rho\Omega^2.$$

$$\theta_0 = k^2 \pi^2 \frac{(R+\delta)^2}{l^2} \left(1 + \frac{\chi^2}{2} \right)$$

$$2\theta_1 = -k^2 \pi^2 \frac{\delta(R+\delta)\chi}{l^2}, \quad 2\theta_2 = k^2 \pi^2 \frac{\delta^2 \chi^2}{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Согласно гипотезе Гюмбеля, координата образования несущей пленки φ_0 определяется как место, где решение уравнения (2.1) дает нулевое значение локального давления. По торцам подшипника и на линии наименьшей толщины слоя смазки гидродинамическое давление равно нулю

$$(2.2) \quad p(\varphi = \varphi_0, z) = p(0, z) = p(\varphi, 0) = p(\varphi, l) = 0$$

Как следует из [11], задача (2.1), (2.2) эквивалентна интегральному уравнению с переменным верхним пределом по φ

$$(2.3) \quad p = -\rho \int_0^\varphi \int_0^l G(\varphi, z; \xi, \zeta) \left[\frac{1}{\mu^2} (3p^2 - 1/3 \tau^2) - 2\Omega^2 \right] d\xi d\zeta + w(\varphi, z)$$

$$(2.4) \quad \left[\left(\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^2 \theta_n \cos n\varphi \right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w = 0$$

Здесь $w(\varphi, z)$ — решение задачи Дирихле (2.4), (2.2), а $G(\varphi, z; \xi, \zeta)$ — функция Грина дифференциального оператора в уравнении (2.4).

Решение однородного уравнения (2.4) возьмем в виде [10]

$$(2.5) \quad w = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{mk} \sin \left(\frac{\lambda_k}{2} + m \right) \varphi \sin \frac{k\pi z}{l}$$

$$b_{0k} = \frac{12\mu R}{\delta^2(2+\chi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} |a^k| \left(1 + \frac{k}{\sqrt{1-\chi^2}}\right), \quad a = \frac{\chi}{1+\sqrt{1-\chi^2}}$$

Остальные значения коэффициента b_{mk} находятся через b_{0k} и миноры определителя Хилла. Коэффициент b_{mk} в решении (2.5) включает в себя физические и конструктивные параметры подшипника, u (м/сек) — окружная скорость шипа.

Рассмотрим подробнее функцию Грина, вихрь и касательные напряжения. Из физических условий известно, что $R \gg \delta$, т. е. постоянный коэффициент θ_0 в дифференциальном операторе (2.4) значительно превышает коэффициенты при $\cos \varphi$. Если сохранить в дифференциальном операторе уравнения (2.4) только коэффициент θ_0 , то он трансформируется в оператор Лапласа $\partial^2/\partial\varphi^2 + \partial^2/\partial z^2$. Тогда в качестве $G(\varphi, z; \xi, \zeta)$ для инженерных расчетов можем взять функцию Грина оператора Лапласа для прямоугольника на плоскости

$$G(\varphi, z; \xi, \zeta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{r_{ij}^+} - \ln \frac{1}{r_{ij}^-} + \ln \frac{1}{\rho_{ij}^+} - \ln \frac{1}{\rho_{ij}^-} \right)$$

$$r_{ij}^{\pm} = \sqrt{[\varphi - (2i\varphi_0 \pm \xi)]^2 + [z - (2jl \pm \zeta)]^2},$$

$$\rho_{ij}^{\pm} = \sqrt{[\varphi - (2i\varphi_0 \pm \xi)]^2 + [z - (2jl \mp \zeta)]^2}$$

где φ_0 и l — стороны прямоугольника.

Из определения числа Эйлера следует: $V^2 = p/E\rho$, где E — число Эйлера. Так как вихрь есть следствие изменения профиля канала, то $\Omega^2 = V^2/h^2 = p/E\rho h^2$.

Продифференцируем выражение для V по нормали к скорости и затем умножим обе части равенства на μ . Имеем

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\rho}{E\rho} \right)^{1/2} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Переходя в подынтегральной функции $(1/\mu^2)(3p^2 - 1/3\tau^2) - 2\Omega^2$ уравнения (2.3) к безразмерным величинам, получим выражение для оценки τ^2, Ω^2

$$1 - \frac{\nu^2 \rho}{36E\rho^3} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^2 - \frac{2\mu^2}{3h^2 E \rho p}$$

В нулевом приближении можно положить $p = w$, $\partial p/\partial n = \partial w/\partial n$, $E = w/\rho u^2$, откуда оценка по нулевому приближению для безразмерных τ^2, Ω^2 дает значения $10^{-6}, 10^{-4}$ соответственно при $\mu = 1.78 \cdot 10^{-4}$ кг·сек/м², $\rho = 103$ кг·сек²/м⁴ (вода), $u = 62$ м/сек, $h \approx 10^{-3}$ см. Значение E можно определить вычислением или по фиг. 2. Например, для точки $\varphi = 30^\circ$, $z = l/2$, $E = 0.26$; $h = 0.005(1 - 0.8 \cos 30^\circ) = 1.5 \cdot 10^{-3}$ см при $\delta/R = 0.0025$, $R = 2$ см, $\chi = 0.8$; $\partial w/\partial n = \partial w/R \partial \varphi = 25$ кг/см³, ибо $\partial w/\partial z = 0$ и по условию $\partial p/\partial r = 0$.

Непосредственное вычисление в нулевом приближении τ^2 и Ω^2 через скорости v_φ и v_z , получаемые из стандартного решения уравнений Рейнольдса, дает результат на порядок ниже.

Вклад от τ^2 и Ω^2 невелик, и поэтому без ущерба инженерным вычислениям при решении интегрального уравнения (2.3) сохраняем в подынтегральной функции слагаемое $(3/\mu^2)p^2$.

В уравнении (2.3) предварительно перейдем к новым переменным по формулам $\varphi = \varphi'/3\rho^{1/2}$, $z = z'/3\rho^{1/2}$ и в дальнейшем, опуская штрих над φ' и z' , перепишем (2.3) в виде

$$(2.6) \quad p = -\alpha \int_0^\varphi \int_0^l G(\varphi, z; \xi, \zeta) p^2(\xi, \zeta) d\xi d\zeta + w(\varphi, z)$$

где $\alpha = 1/3$ — малый параметр.

Решение интегрального уравнения (2.6) в первом приближении имеет вид

$$p_1 = -\alpha \int_0^\varphi \int_0^l G(\varphi, z; \xi, \zeta) w^2(\xi, \zeta) d\xi d\zeta + w(\varphi, z)$$

Переменный верхний предел по φ приближенно примем таким же, какой получен для решения w .

Результаты вычислений первого приближения $p_1(\varphi, z=l/2)$ представлены на фиг. 2 кривой 1; кривая 2 — решение $w(\varphi, z=l/2)$. По оси ординат слева отложено давление p , кг/см², справа — безразмерное давление $E=p/\rho u^2$. По оси абсцисс отсчитывается угловая протяженность пленки для подшипника $l/2R=0.7$ при торцовой подаче смазки без давления [10]. Кривые 1 и 2 построены для подшипника, работающего на воде с параметрами, указанными ранее. Число Рейнольдса $Re=\rho u d/\mu=1740$. Это соответствует числу Рейнольдса по определению работы [1], равному 9. На фиг. 2 представлены для сравнения кривые 3, 4 работы [3]. Кривая 3 — эпюра давлений без учета конвективных членов, кривая 4 — с их учетом.

В заключение автор благодарит А. К. Дьячкова за руководство работой, М. В. Корвчинского за полезные замечания, а также Е. И. Поддубную за проведенные ею вычисления на ЭВМ.

Поступила 2 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Kahlert W. Der Einfluss der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie. Inger-Archiv, 1948, vol. 16, No. 5–6.
2. Никитин А. К. О движении вязкой жидкости между шипом и подшипником. Инж. сб., 1956, т. 23.
3. Родкевич, Энвар. Инерционные и конвективные эффекты в смазочной пленке плоского подшипника скольжения. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 2.
4. Пэн. Расчет давления, трения и расхода в пленках смазки высокоскоростных подшипников. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1974, т. 96, № 1.
5. Константинову, Галетузе. О возможностях повышения точности расчета инерционных сил в ламинарных и турбулентных пленках. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1974, № 1.
6. Reinhardt E., Lund I. The Influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings. Trans. ASME J. lubrication technology, 1975, vol. 97, No. 2.
7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955, стр. 100–104.
8. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, стр. 39.
9. Архангельский Е. П. Тангенциальная протяженность несущей части слоя смазки конечного опорного подшипника. М., «Машиноведение», 1975, № 2.
10. Функциональный анализ. Баку, Изд-во АН АзССР, 1967.
11. Pinkus O., Sternlicht B. Theory of hydrodynamic lubrication. N. Y., Mc Graw-Hill, 1961.

УДК 532.525.6

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ С ПРЕГРАДАМИ

М. М. ГОЛОМАЗОВ, В. В. ЕЖКОВ

(Москва)

В работе приведены результаты численных экспериментов на основе метода крупных частиц, моделирующих истечение струи идеального газа в область сложной геометрической формы.

Характерной особенностью взаимодействия затопленных струй с преградами является сложная структура потока, содержащая внутри области течения газодинамические разрывы (ударные волны, контактные поверхности) и области их взаимодействия. Полное решение подобных задач может быть получено при использовании как экспериментальных, так и численных методов. Однако в ряде практически важных случаев моделирование натурных условий на экспериментальных установках затруднительно и важным становится численный подход.

При численных исследованиях задачи о взаимодействии затопленной струи с плоской преградой, перпендикулярной потоку, обычно выделяются характерные области течения, при этом используются предварительные представления о струк-