

исходит накопление тепла, что приводит к появлению вертикального градиента температуры и образованию пограничного слоя. В случае жидкости Уильямсона эти явления также имеют место и приводят к разрушению квазитвердых зон.

При уменьшении числа Рэлея сначала происходит постепенное увеличение размеров зон квазитвердого движения (фиг. 3, б',  $R=7 \cdot 10^3$ ). При  $R \approx 5 \cdot 10^3$  интенсивность движения и напряжения в полости резко уменьшаются, происходит переход на нижнюю ветвь стационарных движений.

Таким образом, конвективное движение вязкопластичной жидкости в прямоугольной области характеризуется происходящими по мере изменения числа Рэлея изменениями структуры зон квазитвердого и вязкопластического течения. Ввиду сложности реологической модели вывод о наличии гистерезиса нуждается в дополнительной проверке на других схемах.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за руководство работой.

Поступила 9 VI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Любимова Т. П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
2. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 11. М., МГУ, 1968.
3. Янг Вен-ей, Е Су-чень. Свободная конвекция пластика Bingham между двумя вертикальными пластинами. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Теплопередача, 1965, т. 87, № 2.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.

УДК 532.5

### О ФОРМАХ ЗАКРУЧЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СТРУЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. ЕПИХИН

(Москва)

Для приложений представляют интерес кольцевые струи несжимаемой жидкости, движущиеся в неподвижном газе. Критический анализ работ, посвященных струям из центробежных форсунок, содержится в [1]. В этих работах объясняются наблюдающиеся в опытах формы струй «тюльпан» и «пузырь», а также предсказывается существование кольцевых струй периодической формы. Однако при получении результатов используются упрощения деталей течения. Так, в уравнениях, описывающих равновесие сил, действующих на пленку, не учитываются силы, возникающие из-за искривления ее формы в меридиональных сечениях, а также перемещенность тангенциальной составляющей скорости в поле центробежных сил.

В данной работе методом [2] выводятся уравнения, описывающие течения закрученных кольцевых струй жидкости с равномерным профилем продольных скоростей в невозмущенной идеальной среде с учетом сил поверхностного натяжения и тяжести, а также перепада давлений снаружи и в полости струи. Приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие зависимость форм струй от относительного вклада капиллярных и инерционных сил, а также перепада давлений, величины начальной закрутки, угла истечения из сопла и силы тяжести.

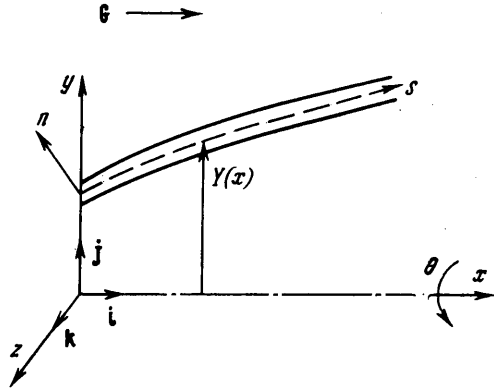
1. Ламинарные течения закрученных кольцевых струй несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье – Стокса во внутренней ортогональной системе координат  $\{s, n, \theta\}$ , связанной со срединной поверхностью струи. Начало отсчета совместим с плоскостью сопла (фиг. 1). Используя в качестве масштабов начальный радиус вращения срединной поверхности  $R_0$ , максимальную скорость истечения  $U_0$  и плотность жидкости  $\rho_F$ , введем безразмерные переменные. Введем характерные числа Вебера, Фруда, Рейнольдса, а также число кавитации

$$We_1 = \frac{\sigma_1}{\rho_F U_0^2 R_0}, \quad Fr = \frac{GR_0}{U_0^2}, \quad Re = \frac{U_0 R_0}{\nu_F}, \quad \kappa = \frac{p_2^e - p_1^e}{\rho_F U_0^2}$$

Здесь величина  $G$  обозначает ускорение силы тяжести,  $p_l^e$  ( $l=1, 2$ ) – гидростатические давления в окружающей среде соответственно на внешней и внутренней граничных поверхностях струи,  $\sigma_l$  ( $l=1, 2$ ) – коэффициент межфазного натяжения на поверхности с номером  $l$ ;  $\rho_F, \nu_F$  – плотность и кинематическая вязкость жидкости.

Сделаем замену переменной  $N = n\epsilon^{-1}$  и представим решение в виде разложений по степеням параметра  $\epsilon = Re^{-1/2}$ , считая нормальную скорость и толщину струи малыми первого порядка малости. В первом приближении получим систему уравнений, описывающую течение жидкости в закрученной струе

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial N} = Fr \cos \alpha + \\
 & + \omega^2 Y \sin \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \\
 & - \frac{u^2}{r_0} = - \frac{\partial p}{\partial N} - \\
 & - Fr \sin \alpha + \omega^2 Y \cos \alpha \\
 & u \frac{\partial \omega}{\partial s} + v \frac{\partial \omega}{\partial N} = - \\
 & - \frac{2\omega u}{Y} \sin \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial N^2} \\
 & \frac{\partial}{\partial s}(Yu) + \frac{\partial}{\partial N}(Yv) = 0
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

В системе уравнений (1.1) величина  $r_0(s)$  обозначает радиус кривизны сечения поверхности струи  $Y=Y(s)$  меридианной плоскостью;  $u, v$  – тангенциальная и нормальная составляющие скорости;  $\omega$  – угловая скорость;  $p$  – гидродинамическое давление. Уравнения срединной и граничных поверхностей струи имеют соответственно вид

$$(1.2) \quad \frac{dY}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{dX}{ds} = \cos \alpha, \quad N=0$$

$$(1.3) \quad u_l \frac{d\delta_l}{ds} = 2v_l, \quad N = (-1)^{l+1} \frac{1}{2} \delta(s) \quad (l=1, 2)$$

Граничные условия на межфазных поверхностях выражают отсутствие касательных напряжений, а также скачок нормальных напряжений и в рассматриваемом приближении имеют вид [3]

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad p_l = p_l^e + (-1)^{l+1} \frac{2W_s}{R_s}, \quad N = (-1)^{l+1} \frac{1}{2} \delta(s)$$

$$(1.4) \quad 2W_s = W_1 + W_2, \quad \frac{2}{R_s} = \frac{\cos \alpha}{Y} - \frac{d\alpha}{ds}$$

Величина  $R_s$  обозначает эффективный радиус кривизны срединной поверхности в рассматриваемой точке. Если профили тангенциальных и угловых скоростей в начальном сечении  $s=0$  равномерные и мало отличаются от равномерных при  $s>0$ :  $u=u(s), \omega=\omega(s)$ , то первое, третье и четвертое уравнения системы (1.1) с учетом (1.3) имеют вид

$$(1.5) \quad u \frac{du}{ds} = Fr \cos \alpha + \omega^2 Y \sin \alpha, \quad u \frac{d\omega}{ds} = - \frac{2\omega u}{Y} \sin \alpha$$

$$Yu\delta = Q_0 = \text{const}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1.1). При фиксированном значении координаты  $s$  это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по  $N$

$$(1.6) \quad \frac{\partial p}{\partial N} = -Fr \sin \alpha + \frac{u^2}{r_0} + \omega^2 Y \cos \alpha$$

Интегрируя его поперек струи с учетом граничных условий (1.4), находим соотношение

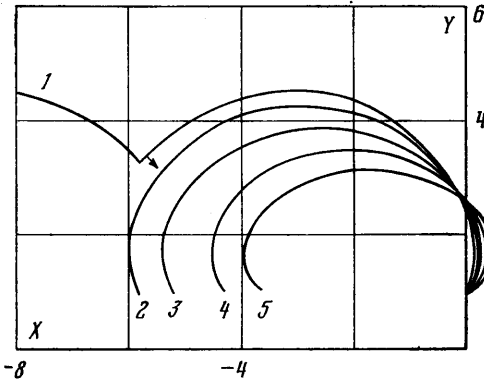
$$p_2 - p_1 = (Fr \sin \alpha - u^2/r_0 - \omega^2 Y \cos \alpha) \delta(s)$$

Выражая отсюда кривизну формы струи с учетом (1.4), получим уравнение

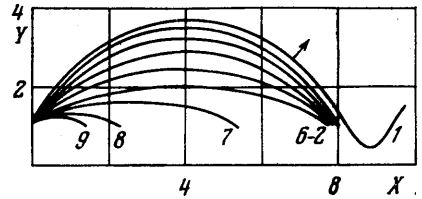
$$(1.7) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha - YEu + (Fr^\circ \sin \alpha - We^\circ \omega^2 Y \cos \alpha)/u}{Y - We^\circ u}$$

$$We^\circ = \frac{Q_0}{2W_s}, \quad Fr^\circ = \frac{Fr Q_0}{2W_s}, \quad Eu = \frac{\kappa}{2W_s}$$

Здесь безразмерные параметры задачи заменены модифицированными критериями по формулам [2], где было принято  $Q_0=1$ . (Первые два уравнения системы (5) и третье уравнение системы (8) работы [2] используют число  $Fr$  настоящей статьи.)



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, задача о течении струи несжимаемой жидкости в идеальной невозмущенной среде сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2), (1.5), (1.7) с начальными условиями

$$(1.8) \quad u(0)=1, \quad \omega(0)=\omega_0, \quad Y(0)=1, \quad \alpha(0)=\alpha_0$$

2. Уравнения (1.5) в случае  $Fr^\circ=0$  можно проинтегрировать. С учетом начальных условий (1.8) найдем

$$(2.1) \quad \omega(s) = \frac{\omega_0}{Y^2(s)}, \quad u(s) = \left[ 1 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Y^2(s)} \right]^{1/2}$$

Воспользуемся выражениями (2.1), чтобы вычислить радиус поверхности в критическом сечении, где тангенциальная составляющая скорости  $u_*=0$

$$(2.2) \quad Y_* = \omega_0 / (1 + \omega_0^2)^{1/2}$$

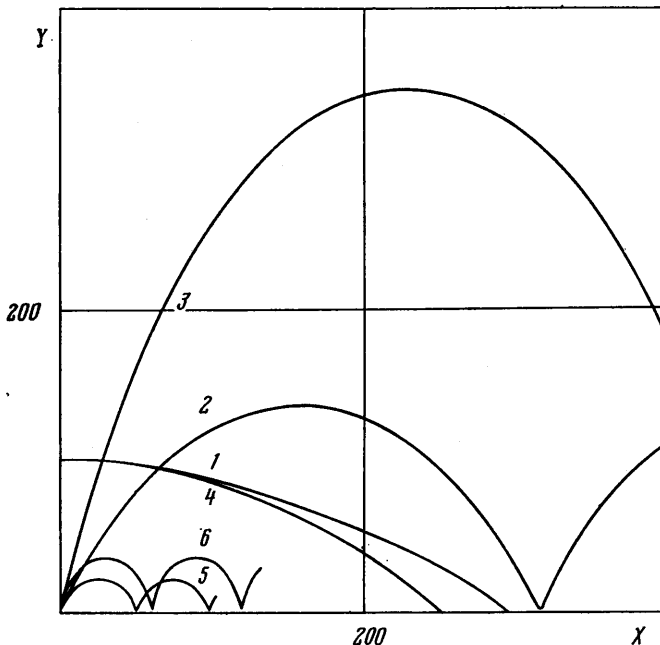
Из формулы (2.2) следует, что при больших начальных закрутках все  $Y_*(\omega_0)$  близки к единице, а критические сечения смещаются к началу течения (сравни с [1, 4, 5]).

На фиг. 2 представлены результаты численного решения задачи (1.2), (1.5), (1.7), (1.8) в случае  $Fr^\circ=0$ ,  $We^\circ=0.1$ ,  $\alpha_0=\pi/3$ ,  $Eu=-0.5$ . Линиям 1-5 на фиг. 2 соответствуют значения  $\omega_0=0, 4.1, 8.1, 12.1, 14.1$ . При этом тангенциальная составляющая скорости сначала возрастает до максимальных значений, которые равняются соответственно  $u_{\max}=1, 4.11, 7.89, 11.6, 13.4$  при удалении от оси вращения, а затем уменьшается до нулевого значения при течении против поля центробежных сил в соответствии с формулой (2.2). Расчеты форм кольцевых струй при  $Eu=0.5$  и при тех же самых значениях остальных безразмерных параметров и угла истечения представлены на фиг. 3. Здесь линиям 1-9 соответствуют значения  $\omega_0=0, 2, 4, 6, 8, 9.1, 9.6, 10.1, 10.6$ .

Соответствующие значения  $u_{\max}=1, 2.16, 3.94, 5.73, 7.39, 8.0, 7.67, 7.0, 6.60$ . На этих фигурах стрелочка изображает внешнюю нормаль к срединной поверхности.

В случае  $We^\circ < 1$  увеличение  $Eu$  или начальной закрутки влечет поджатие струи.

3. Закрутка препятствует смыканию полости кольцевых струй вследствие роста центробежных сил при приближении жидкого элемента к оси вращения. Струи, смыкавшиеся в случае  $\omega_0=0$ , принимают волнообразную форму при  $\omega_0>0$ , как это



Фиг. 4

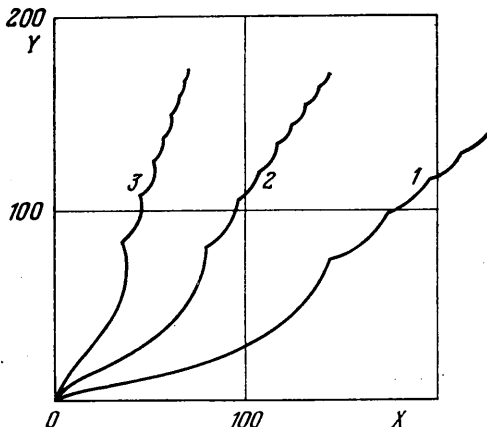
показано на фиг. 4. Здесь параметры задачи равняются  $Fr^\circ=0, We^\circ=110, Eu=0, \alpha_0=0$ , а линиям 1-3 соответствуют значения  $\omega_0=0, 2, 4$ . Линии 4-6 отвечают струям с  $Eu=-0.5$  и тем же самым значениям остальных параметров. Увеличение начальной закрутки ведет к уменьшению относительного вклада капиллярных сил, к увеличению максимального радиуса струи и ее периода. Влияние параметра  $We^\circ$  аналогично закрутке. Линии 1, 4 показаны в масштабе  $20 \cdot X, 100 \cdot Y$ .

Расчеты тяжелых кольцевых струй при тех же значениях параметров  $We^\circ, Eu$ , угла истечения и начальной закрутки демонстрируют уменьшение максимального радиуса поверхности и увеличение расстояния между последовательными точками экстремума вдоль струй.

4. При положительных значениях параметра  $Eu > 0, \alpha_0 \geq 0$  на поверхности струй появляются линии самопересечения. На фиг. 5 можно видеть результаты расчетов кольцевых струй в случае  $\alpha_0=\pi/3, Fr^\circ=100, We^\circ=110, Eu=0.5$ . Линиям 1-3 соответствуют значения  $\omega_0=0, 2, 4$ . Увеличение значения  $We^\circ$  ведет к убыванию частоты появления линий самопересечения на поверхности струи.

Расчеты в случае  $Eu \leq 0$  и тех же самых значениях остальных параметров позволяют получить кольцевые струи без самопересечений. Увеличение параметра  $Fr^\circ$  ведет к отклонению поверхности струй в сторону действия силы тяжести.

Чтобы понять роль начального угла, были проведены расчеты при значениях параметров  $Fr^\circ=100, We^\circ=1100, Eu=0.5$  и  $\alpha_0=-\pi/3, 0, \pi/3$ . При  $\alpha_0=-\pi/3, \omega_0=0$  форма струи близка к поверхности



Фиг. 5

прямого кругового конуса с вершиной на оси симметрии. Предварительная закрутка, например  $\omega_0=2$ , ведет к отклонению поверхности струи от оси вращения вблизи сопла, а вдали от него форма струи близка к форме струи, вытекающей при  $\alpha_0=\pi/3$  и тех же самых значениях параметров. Сопоставление расчетов при  $\alpha_0=0$  и  $\alpha_0=\pi/3$  показывает, что в первом случае при одних и тех же значениях  $\omega_0=0, 2, 4$  и других параметров отклонение поверхности струи от оси вращения меньше.

5. Непосредственной проверкой можно убедиться, что первый интеграл уравнения (1.7) имеет вид

$$(5.1) \quad (Y - We^\circ u) \cos \alpha - Eu Y^2/2 = A, \quad Fr^\circ = 0$$

Здесь  $A$  — постоянная интегрирования.

Выражение (5.1) аналогично первому интегралу в частном случае незакрученных струй (формула (11) работы [2], где  $u=1$ ).

Автору известно, что независимый вывод уравнений, описывающих формы закрученных кольцевых струй, был выполнен в 1968 г. Ю. Н. Каллистовым, рассмотревшим теоретически и экспериментально случаи сильной и слабой закруток. А. Н. Хомяков указал автору первый интеграл уравнений движения для тангенциальной скорости при наличии силы тяжести.

Подробное исследование кольцевых струй без предварительной закрутки и сравнение с экспериментом выполнено в статье [6].

Сформулируем результаты работы. При наличии закрутки отсутствуют смыкающиеся струи. В результате вычислений получены формы струй с критическим сечением, где тангенциальная составляющая скорости уменьшается до нулевого значения; струи волнообразной формы, а также струи с самопересечением. Во всех рассмотренных случаях тангенциальная составляющая скорости жидкого элемента увеличивается при удалении от оси вращения и уменьшается при течении по направлению к оси, против поля центробежных сил. Выводы, касающиеся течений незакрученных струй, соответствуют данным [6].

В заключение автор выражает благодарность В. Я. Шкадову за внимание к работе.

Поступила 4 X 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф. О форме жидкой пленки, создаваемой центробежной форсункой. Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1960, № 2.
2. Епишкин В. Е. О формах кольцевых струй капельной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1977.
5. Taylor G. I. The dynamics of thin sheets of fluid III. Disintegration of fluid sheets. Proc. Soc. London 1959, ser. A, vol. 253, No. 1274.
6. Казеннов А. К., Каллистов Ю. Н., Карликов В. П., Шоломович Г. И. Исследование тонких кольцевых струй несжимаемой жидкости. Научн. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1970, № 1.

УДК 532.516

### ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНОГО УСКОРЕНИЯ В УРАВНЕНИИ СТОКСА НА ВЕЛИЧИНУ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

Е. П. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

(Москва)

Высокие скорости скольжения в узлах трения, а также использование в качестве смазки воды приводят к постановке задачи о влиянии инерционных сил на развитие несущей способности слоя смазки. Ряд авторов [1-6] посвятили свои работы учету конвективных членов уравнения Навье — Стокса при определении давления в жидкостном слое смазки подшипника. При этом отмечается [6] возрастание несущей способности смазочного слоя на 20% при  $Re=5000$ .