

О КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ
В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Т. П. ЛЮБИМОВА

(Пермь)

Плоское конвективное движение вязкопластичной жидкости в длинном горизонтальном цилиндре квадратного сечения при нагреве сбоку численно изучено в [1]. В данной работе численно решается задача о конвекции вязкопластичной жидкости в прямоугольной области.

Рассматривается плоское конвективное движение в прямоугольной области, ограниченной вертикальными плоскостями $x=0$ и $x=a$ и горизонтальными $y=0$ и $y=la$. На вертикальных участках границы поддерживаются постоянные (разные) температуры; на горизонтальных участках температура меняется по линейному закону.

Как и в [1], используется реологическая модель Уильямсона, которая может рассматриваться как регуляризация обычно применяемой при описании вязкопластичных сред модели Шведова – Бингама. Запишем уравнения конвекции жидкости Уильямсона в переменных функции тока ψ , вихря скорости φ и температуры T в безразмерном виде:

$$(1) \quad \frac{1}{P} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = H \Delta \varphi + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} -$$

$$- 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + R \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta T$$

$$\varphi = -\Delta \psi$$

$$H = 1 + \tau_0 \left(\alpha + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2} \right)^{-1}$$

На границе полости Γ обращаются в нуль нормальная и касательная компоненты скорости и задана температура:

$$(2) \quad \psi|_{\Gamma}=0, \quad \partial \psi / \partial n|_{\Gamma}=0, \quad T(0, y)=0, \quad T(1, y)=1, \quad T(x, 0)=T(x, l)=x.$$

В качестве единиц измерения длины, функции тока, времени, температуры, напряжения выбраны соответственно: a , χ , a^2/χ , Θ , $\mu_{\infty} \chi / a^2$ (χ – коэффициент температуропроводности, Θ – поперечная разность температур, μ_{∞} – вязкость при больших скоростях деформации). Задача содержит следующие безразмерные параметры: числа Рэлея $R = g \beta \Theta a^3 / \nu \chi$ и Прандтля $P = \nu / \chi$ (здесь $\nu = \mu_{\infty} / \rho$), геометрический параметр l – отношение высоты прямоугольника к его ширине, а также безразмерные реологические параметры $\tau_0 = \tau_0' a^2 / \mu_{\infty} \chi$ и $\alpha = \alpha' a^2 / \chi$.

Задача (1), (2) решалась численно методом конечных разностей. Стационарные решения получались с помощью стационарной схемы. Все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Значения вихря скорости на границе получались по формулам, предложенным в [2].

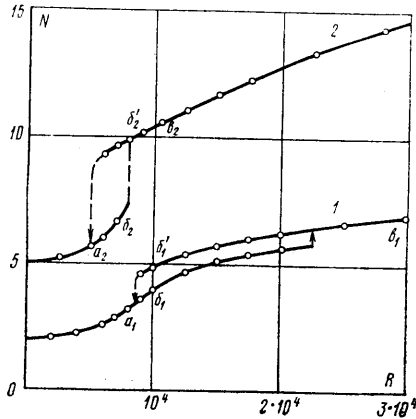
В ходе расчетов находились поля функции тока, вихря скорости и температуры, определялись интегральные характеристики течения – экстремальное значение функции тока и безразмерный тепловой поток, число Нуссельта:

$$(3) \quad N = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dl$$

условно определялись области квазитвердого и вязкопластического течений; в качестве условия, выделяющего квазитвердую зону, принималось:

$$(4) \quad \sqrt{T_2} < \tau_0, \quad T_2 = 1/2 \tau_{ik} \tau_{ik}$$

где T_2 — второй инвариант безразмерного тензора вязких напряжений. Условие (4) эквивалентно требованию малости скоростей деформации внутри зоны квазитвердого вращения.



Фиг. 1

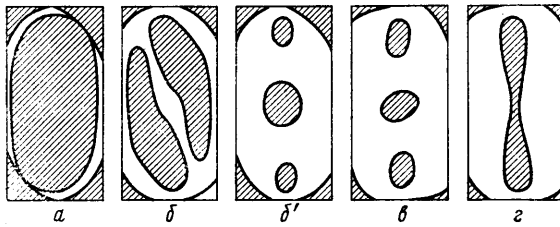
Расчеты проводились при фиксированном значении числа Прандтля $P=100$ для значений реологических параметров (τ_0, α) : (250, 10), (250, 5) и геометрического параметра $l=2$ и 5. Число Рэлея варьировалось в интервале $0 \div 10^5$. Основные вычисления были проведены на равномерных сетках с шагом $h=1/20$ (при $l=2$) и $h=1/15$ (при $l=5$).

На фиг. 1 изображена полученная в численном счете зависимость безразмерного теплового потока от числа Рэлея для жидкости Уильямсона с параметрами $\tau_0=250$, $\alpha=10$ при отношении сторон прямоугольника 2:1 ($l=2$) (кривая 1). Видно, что, как и в случае квадратной области [1], при числах Рэлея, меньших некоторого значения R_* , тепловой поток близок к l -конвективное движение в полости почти отсутствует (величина R_* пропорциональна предельному напряжению τ_0 с коэффициентом, зависящим от l). В области $R \sim R_*$ происходит резкое нарастание интенсивности движения и теплопотока. При дальнейшем увеличении числа Рэлея происходит перестройка структуры течения, которая имеет жесткий характер и сопровождается гистерезисом. Следует отметить, что область чисел Рэлея, в которой зависимость теплопотока от числа Рэлея неоднозначна, достаточно широка ($9 \cdot 10^3 \div 2.2 \cdot 10^4$).

На фиг. 2 показано расположение зон квазитвердого и вязкопластического течений при различных числах Рэлея (квазитвердые зоны заштрихованы). При малых числах Рэлея вся область является квазитвердой зоной, в которой почти отсутствует течение.

При числе Рэлея $R \sim R_*$ значения второго инварианта тензора напряжений в узком слое, касающемся границ области, достигают предельного значения. Появляется зона вязкопластического течения (фиг. 2, а, $R=8 \cdot 10^3$). Область внутри жидкого слоя является зоной квазитвердого вращения — значения $\sqrt{T_2}$ в ней меньше предельного. Граница зоны квазитвердого вращения в этом случае не является линией тока, и при стационарном движении частицы жидкости могут переходить через эту границу (линии тока внутри зоны квазитвердого вращения должны быть близки к круговым вследствие малости второго инварианта тензора скоростей деформации I_2 , так как в случае среды Шведова — Бингама внутри зоны квазитвердого вращения $I_2=0$ и линии тока строго круговые).

При увеличении числа Рэлея ширина зоны вязкопластического течения, примыкающей к стенкам, растет. Появляется зона вязкопластического течения в центральной части области (фиг. 2, б, $R=10^4$). Зона квазитвердого вращения разбивается на две отдельные зоны.



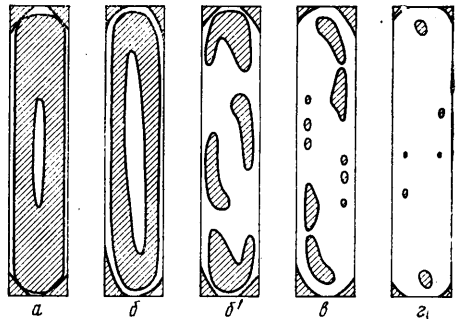
Фиг. 2

При дальнейшем увеличении числа Рэлея (в интервале чисел Рэлея $10^4 + 2 \cdot 10^4$) расположение зоны квазитвердого и вязкопластического течений меняется незначительно.

Когда число Рэлея становится равным $2.2 \cdot 10^4$, происходит переход с нижней на верхнюю ветвь стационарных движений; структура течения и положение зон квазитвердого и вязкопластического течений существенно изменяются. На фиг. 2, в показана структура зон при $R = 3 \cdot 10^4$. Зоны квазитвердого движения имеют вид комков, расположенных у оснований прямоугольника и в его центре.

При $R = 6 \cdot 10^4$ (фиг. 2, г) в центре области существует единая неправильной формы зона квазитвердого движения.

При уменьшении числа Рэлея структура течения и расположение зон квазитвердого и вязкопластического течений остаются практически неизменными вплоть до $R \sim 9 \cdot 10^3$ (фиг. 2, б', $R = 10^4$). При $R \approx 9 \cdot 10^3$ происходит резкое уменьшение интенсивности движения (переход с верхней на нижнюю ветвь стационарных движений). Появляется единая занимающая почти всю область зона квазитвердого движения.



Фиг. 3

Качественно сходные результаты получаются при отношении сторон $l = 5$. На фиг. 1 (кривая 2) представлена зависимость безразмерного теплового потока от числа Рэлея ($P = 100, \tau_0 = 250, \alpha = 10$). Видно, что зависимость имеет тот же характер, что и в случае $l = 2$. Отличия от последней заключаются в следующем: 1) значение R_* , при котором начинается интенсивная конвекция жидкости Уильямсона, меньше, чем при $l = 2$; оно, как можно было ожидать, ближе к пороговому значению R_* , при котором возникает конвективное движение жидкости Шведова – Бингама в бесконечном вертикальном слое [3]; 2) область чисел Рэлея, в которой происходит перестройка структуры течения, сопровождающаяся гистерезисом, уже, чем при $l = 2$, и смещена в область меньших значений числа Рэлея.

На фиг. 3 показано расположение зон квазитвердого и вязкопластического течений при различных числах Рэлея. Видно, что уже при числе Рэлея $R = 5 \cdot 10^3$ появляются зоны вязкопластического течения в центральной части области и вблизи стенок (фиг. 3, а).

При увеличении числа Рэлея обе зоны вязкопластического течения растут за счет уменьшения размеров зоны квазитвердого вращения, которая в этой области чисел Рэлея представляет собой цельное вытянутое по вертикали кольцо (фиг. 3, б, $R = 7 \cdot 10^3$). Именно в этой области чисел Рэлея картина движения и структура зон квазитвердого и вязкопластического течений наиболее похожи на то, что имеет место в бесконечном вертикальном слое [3].

При дальнейшем увеличении числа Рэлея интенсивность движения и теплопереноса резко возрастают, происходит переход на верхнюю ветвь стационарных движений. Зона квазитвердого движения разбивается на отдельные зоны (фиг. 3, в, $R = 1.05 \cdot 10^4$). При увеличении числа Рэлея размеры зон квазитвердого движения постепенно уменьшаются.

Как показали расчеты, структура движения и расположение зон квазитвердого и вязкопластического течений при больших числах Рэлея не похожи на то, что наблюдается в бесконечном вертикальном слое (фиг. 3, г, $R = 4 \cdot 10^4$). Известно [4], что в случае ньютоновской жидкости различие между картинами движения в бесконечном вертикальном слое и в вытянутой по вертикали замкнутой области обусловлено тем, что при больших числах Рэлея в верхней части замкнутой области про-

исходит накопление тепла, что приводит к появлению вертикального градиента температуры и образованию пограничного слоя. В случае жидкости Уильямсона эти явления также имеют место и приводят к разрушению квазитвердых зон.

При уменьшении числа Рэлея сначала происходит постепенное увеличение размеров зон квазитвердого движения (фиг. 3, б', $R=7 \cdot 10^3$). При $R \approx 5 \cdot 10^3$ интенсивность движения и напряжения в полости резко уменьшаются, происходит переход на нижнюю ветвь стационарных движений.

Таким образом, конвективное движение вязкопластичной жидкости в прямоугольной области характеризуется происходящими по мере изменения числа Рэлея изменениями структуры зон квазитвердого и вязкопластического течения. Ввиду сложности реологической модели вывод о наличии гистерезиса нуждается в дополнительной проверке на других схемах.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за руководство работой.

Поступила 9 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимова Т. П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
2. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 11. М., МГУ, 1968.
3. Янг Вен-ей, Е Су-чень. Свободная конвекция пластика Bingham между двумя вертикальными пластинами. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Теплопередача, 1965, т. 87, № 2.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.

УДК 532.5

О ФОРМАХ ЗАКРУЧЕННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СТРУЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. ЕПИХИН

(Москва)

Для приложений представляют интерес кольцевые струи несжимаемой жидкости, движущиеся в неподвижном газе. Критический анализ работ, посвященных струям из центробежных форсунок, содержится в [1]. В этих работах объясняются наблюдающиеся в опытах формы струй «тюльпан» и «пузырь», а также предсказывается существование кольцевых струй периодической формы. Однако при получении результатов используются упрощения деталей течения. Так, в уравнениях, описывающих равновесие сил, действующих на пленку, не учитываются силы, возникающие из-за искривления ее формы в меридиональных сечениях, а также переменность тангенциальной составляющей скорости в поле центробежных сил.

В данной работе методом [2] выводятся уравнения, описывающие течения закрученных кольцевых струй жидкости с равномерным профилем продольных скоростей в невозмущенной идеальной среде с учетом сил поверхностного натяжения и тяжести, а также перепада давлений снаружи и в полости струи. Приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие зависимость форм струй от относительного вклада капиллярных и инерционных сил, а также перепада давлений, величины начальной закрутки, угла истечения из сопла и силы тяжести.

1. Ламинарные течения закрученных кольцевых струй несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье – Стокса во внутренней ортогональной системе координат $\{s, n, \theta\}$, связанной со срединной поверхностью струи. Начало отсчета совместим с плоскостью сопла (фиг. 1). Используя в качестве масштабов начальный радиус вращения срединной поверхности R_0 , максимальную скорость истечения U_0 и плотность жидкости ρ_F , введем безразмерные переменные. Введем характерные числа Вебера, Фруда, Рейнольдса, а также число кавитации

$$We_1 = \frac{\sigma_1}{\rho_F U_0^2 R_0}, \quad Fr = \frac{GR_0}{U_0^2}, \quad Re = \frac{U_0 R_0}{\nu_F}, \quad \kappa = \frac{p_2^e - p_1^e}{\rho_F U_0^2}$$