

К АНАЛИЗУ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ БАРБОТАЖНОГО РЕАКТОРА

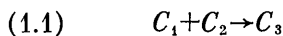
В. С. БЕРМАН, Л. А. ГАЛИН, О. М. ЧУРМАЕВ

(Москва)

Рассматривается математическая модель, описывающая работу двухфазного барботажного реактора. Модель сводится к исследованию задачи Гурса для гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных. В работе построен ряд точных решений поставленной задачи, описывающих работу реактора с момента зажигания до выхода на стационарный режим работы. Проведено также численное исследование задачи.

1. Основные уравнения. Двухфазная упрощенная модель барботажного химического реактора может быть представлена в виде двухкомпонентной модели реактора идеального вытеснения [1, 2]. При продувании газов через слой жидкости вещество, находящееся в газовой фазе, растворяясь в жидкости, реагирует с веществом жидкой фазы. При этом предполагается, что жидкость не перемешивается, а пузырьки газа движутся сквозь нее с постоянной скоростью V' . Если пузырьки достаточно малы и режим обтекания пузырьрей близок к ламинарному обтеканию, можно аппроксимировать реактор одномерной системой, в которой параметры изменяются от сечения к сечению вдоль вертикальной оси x' . В ряде случаев можно также пренебрегать продольной диффузией вещества в реакторе.

Для простоты полагаем, что в реакторе идет одностадийная химическая реакция



где C_1 — концентрация реагента в газовой фазе, C_2 — концентрация реагента в жидкой фазе, C_3 — концентрация продукта реакции.

Предполагая, что продукты реакции также находятся в жидкой фазе и в начальный момент их концентрация равнялась нулю, получим, что во время всего процесса справедливо соотношение

$$(1.2) \quad C_2 = C_{2+} - C_3$$

При этих предположениях динамический режим изотермического реактора можно описать следующей системой уравнений:

$$(1.3) \quad \partial C_1 / \partial t' + V' \partial C_1 / \partial x' = -K(C_{2+} - C_3)^m C_1^n$$

$$(1.4) \quad \partial C_3 / \partial t' = -\partial C_2 / \partial t' = K(C_{2+} - C_3)^m C_1^n$$

$$(1.5) \quad x' = 0, \quad C_1(t', 0) = C_{1+}$$

$$(1.6) \quad t' = 0, \quad C_1(0, x') = C_3(0, x') = 0, \quad C_2(0, x') = C_{2+}$$

Здесь t' — время, x' — пространственная координата, K — постоянная скорости реакции, C_{1+} — концентрация реагента в газе на входе в реактор, C_{2+} — начальная концентрация реагента C_2 в жидкости, $m > 0$ и $n > 0$ — порядки реакции.

В безразмерных переменных вместо (1.3)–(1.6) имеем

$$(1.7) \quad \partial\theta/\partial t + \partial\theta/\partial x = -\varepsilon(1-u)^m\theta^n$$

$$(1.8) \quad \partial u/\partial t = (1-u)^m\theta^n$$

$$(1.9) \quad x=0; \quad \theta(t, 0)=1$$

$$(1.10) \quad t=0, \quad \theta(0, x)=u(0, x)=0$$

$$t=t'KC_{2+}^{m-1}C_{1+}^n; \quad x=x'KC_{2+}^{m-1}C_{1+}^n/V'$$

$$\varepsilon=C_{2+}/C_{1+}, \quad \theta(t, x)=C_1/C_{1+}, \quad u(t, x)=C_3/C_{2+}$$

Подобная система уравнений встречается при исследовании процессов, протекающих в хроматографической колонке [3, 4], где исследовался неустановившийся процесс, описываемый системой уравнений, близкой к (1.7)–(1.10) при линейных правых частях. Аналогичная система уравнений встречается также в задаче теории фильтрации о рассолении почвы грунтовыми водами [7].

В данной работе будет проанализирована зависимость решения (1.7)–(1.10) от параметров ε , m и n .

Система (1.7)–(1.10) является гиперболической [3–6] с характеристиками $\xi=t-x$ и x . Выбирая в качестве независимых переменных ξ и x , имеем

$$(1.11) \quad \partial\theta/\partial x = -\varepsilon(1-u)^m\theta^n, \quad \theta(\xi, 0)=1$$

$$(1.12) \quad \partial u/\partial \xi = (1-u)^m\theta^n$$

Из условий (1.9), (1.10) следует, что решение (1.7)–(1.10), вообще говоря, разрывно и разрыв движется вдоль оси x со скоростью 1 по закону $x-t=0$ ($\xi=0$). Из (1.12) следует, что в точке $\xi=0$ значение величины u непрерывно.

В силу начальных условий при $\xi < 0$ решение (1.11)–(1.12) имеет вид $\theta(\xi < 0, x) = u(\xi < 0, x) = 0$. Это обстоятельство непосредственно следует из устойчивости решения $\theta=0$ уравнения (1.11). Поэтому необходимо искать решение только в области $\xi \geq 0$ при

$$(1.13) \quad u(\xi=0, x)=0$$

Общее решение (1.11)–(1.12) имеет вид $\theta = \theta(\xi, \varepsilon x)$ и $u = u(\xi, \varepsilon x)$ функции от εx и ξ . Отсюда следует, что решение (1.7)–(1.10) зависит от параметра ε только в виде комбинации εx . Поэтому удобно перейти к переменной $\eta = \varepsilon x$, тогда вместо (1.11) получим

$$(1.14) \quad \partial\theta/\partial\eta = -(1-u)^m\theta^n$$

Далее рассмотрим некоторые частные случаи, в которых удастся проинтегрировать систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных точно. Затем будут рассмотрены некоторые типичные значения параметров, при которых система (1.7)–(1.10) решалась численно. Прежде чем приступать к решению системы (1.7)–(1.10), проанализируем качественную картину поведения решения в зависимости от параметров задачи. Функции $\theta(t, x)$ и $u(t, x)$ ограничены: $0 \leq \theta(t, x) \leq 1$ и $0 \leq u(t, x) \leq 1$. При этом $u(t, x)$ монотонно растет (фиксированное x) и убывает с увеличением x (фиксированное t), $\theta(x, t)$ — монотонно убывающая функция x (фиксированное t). (Если $0 < m < 1$, тогда $u(t, x=0)$ обращается в единицу за конечное время и при $t \geq (1-m)^{-1} u(t, x=0) = 1$, $u=1$ является устойчивым значением, что следует из (1.8) при $\theta \neq 0$.)

Непосредственно из (1.8) и (1.9) следует, что

$$(1.15) \quad u(t, x=0) = \begin{cases} 1 - [1 - (1-m)t]^{1/(1-m)}, & m \neq 1 \\ 1 - \exp(-t), & m = 1 \end{cases}$$

Вследствие того что в точке $x=t$ значение $u(t, t; \varepsilon) = 0$, из (1.1) можно получить

$$(1.16) \quad \vartheta(t, t; \varepsilon) = \begin{cases} [1 - \varepsilon(1-n)t]^{1/(1-n)}, & n \neq 1 \\ \exp(-\varepsilon t), & n = 1 \end{cases}$$

При $n \geq 1$ разрыв функции ϑ в точке $x=t$ существует при любом конечном значении t . Если $0 < n < 1$, то $\vartheta(t, t; \varepsilon) = 0$ при $t \geq \varepsilon^{-1}(1-n)^{-1}$.

С учетом (1.15), (1.16) для системы уравнений (1.12) и (1.14) можно поставить условия на характеристиках

$$(1.17) \quad \vartheta(\xi=0, \eta) = \begin{cases} [1 - (1-n)\eta]^{1/(1-n)}, & n > 1 \\ \exp(-\eta), & n = 1 \end{cases}$$

$$u(\xi=0, \eta) = 0; \quad \text{при } 0 < n < 1$$

$$\vartheta(0, \eta) = \begin{cases} [1 - (1-n)\eta]^{1/(1-n)}, & 0 < \eta < \frac{1}{(1-n)} \\ 0, & 1/(1-n) < \eta \end{cases}$$

$$(1.18) \quad \vartheta(\xi > 0, \eta = 0) = 1$$

$$u(\xi > 0, \eta = 0) = \begin{cases} 1 - [1 - (1-m)\xi]^{1/(1-m)}, & m > 1 \\ 1 - \exp(-\xi), & m = 1 \end{cases}$$

$$\text{при } 0 < m < 1 \quad u(\xi, 0) = \begin{cases} 1 - [1 - (1-m)\xi]^{1/(1-m)}, & 0 < \xi < (1-m)^{-1} \\ 1, & (1-m)^{-1} < \xi \end{cases}$$

Таким образом, система уравнений (1.12) и (1.14) с условиями (1.18), (1.19) сводится к задаче Гурса (с условиями на характеристиках) [3, 5]. При $0 < n < 1$ при $t \geq \varepsilon^{-1}(1-n)^{-1}$ реакция прекращается и на интервале $0 \leq \xi \leq \omega_+(\eta)$ выполняется равенство $\vartheta(\xi, \vartheta) = u(\xi, \eta) = 0$. Положение переднего фронта реакции $\xi = \omega_+(\eta)$ находится из условия

$$u(\omega_+(\eta), \eta) = \vartheta(\omega_+(\eta), \eta) = 0$$

Аналогичная ситуация возникает и при $0 < m < 1$. При этом на заднем фронте реакции $\eta = \omega_-(\xi)$

$$\vartheta(\xi, \omega_-(\xi)) = u(\xi, \omega_-(\xi)) = 1$$

Уравнения (1.7)–(1.8) допускают решения в виде бегущей волны $\vartheta(x, t) = \vartheta_s(z)$; $u(x, t) = u_s(z)$, где $z = x - \lambda t - \gamma$, λ – скорость распространения волны, γ – произвольная постоянная. Функции $\vartheta_s(z)$ и $u_s(z)$ являются решением системы

$$(1.19) \quad \frac{d\vartheta_s}{dz}(1-\lambda) = -\varepsilon(1-u_s)^m \vartheta_s^n, \quad -\frac{du_s}{dz} \lambda = (1-u_s)^m \vartheta_s^n$$

$$(1.20) \quad \vartheta_s(-\infty) = u_s(-\infty) = 1, \quad u_s(+\infty) = \vartheta_s(+\infty) = 0$$

Из (1.17) и (1.18) имеем

$$\lambda = (1+\varepsilon)^{-1}, \quad \vartheta_s(z) = u_s(z)$$

(1.21)

$$\frac{d\vartheta_s}{dz} = (1+\varepsilon)(1-\vartheta_s)^m \vartheta_s^n$$

Интересным является вопрос, как нестационарные решения системы (1.7)–(1.10) при $t \rightarrow \infty$ переходят в решения типа стационарных бегущих волн (1.19) и какой след остается в них от начальных условий. В ряде случаев оказывается возможным определить зависимость γ от начальных условий задачи.

Рассмотрим более общий случай.

Положим $t=0$, $0 \leq x < \infty$, тогда $u(x, 0) = u_0(x)$ и $\vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x)$, причем функции $u_0(x)$ и $\vartheta_0(x)$ такие, что существуют интегралы

$$\int_0^{\infty} \vartheta_0(x) dx \text{ и } \int_0^{\infty} u_0(x) dx \quad (\vartheta_0(\infty) = u_0(\infty) = 0, 0 \leq u_0 < 1; 0 \leq \vartheta_0 < 1).$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\vartheta + \varepsilon u) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

Уравнение (1.22) имеет вид закона сохранения. Интегрируя сначала по x от 0 до ∞ и затем по t , получаем

$$(1.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (\vartheta + \varepsilon u) dx = 1$$

$$(1.24) \quad \int_0^{\infty} [\vartheta(x, t) + \varepsilon u(x, t)] dx = t + \int_0^{\infty} [\vartheta_0(x) + \varepsilon u_0(x)] dx$$

При $t \rightarrow \infty$ функции $\vartheta(x, t)$ и $u(x, t)$ стремятся к $\vartheta_s(x - \lambda t - \gamma)$, поэтому интеграл (1.24) принимает вид

$$(1.25) \quad \int_0^{\infty} [\vartheta_s(x - \lambda t - \gamma) + \varepsilon u_s(x - \lambda t - \gamma)] dx = \lambda^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_s(z) dz; \quad s = \lambda t + \gamma$$

Переходя в правой части равенства (1.25) от переменной z к ϑ_s , с учетом (1.21) имеем

$$(1.26) \quad dz = -\lambda(1-\vartheta_s)^m \vartheta_s^{-n} d\vartheta_s$$

Из (1.25), (1.26) получаем

$$(1.27) \quad \int_{\vartheta_s(-s)}^{\vartheta_s(s)} x^{1-n} (1-x)^{-m} dx = t + \int_0^{\infty} [\vartheta_0(x) + \varepsilon u_0(x)] dx$$

Данный метод аналогичен методу, используемому в [3], и применим при $0 < n < 2$ и $1 < m$. В качестве примера рассмотрим случай $m=1$, $n=1$. При этом из (1.27) следует

$$(1.28) \quad \vartheta_s(z) = [1 + c \exp(\lambda^{-1}z)]^{-1}$$

где c — постоянная.

Из (1.27) при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$(1.29) \quad t + \lambda^{-1} \gamma - \ln c + O(\exp(-t)) = t + I$$

$$I = \int_0^{\infty} [\vartheta_0(x) + \varepsilon u_0(x)] dx$$

Откуда $\lambda^{-1} \gamma - \ln c = I$. И из (1.28) находим

$$(1.30) \quad \vartheta_0(x - \lambda t - \gamma) = [1 + \exp(\lambda^{-1} x - t - I)]^{-1}$$

2. Два частных случая. ($m=n=1$ и $m=n=0.5$).
Сначала рассмотрим случай

$$(2.1) \quad m=n=1$$

При этом удобно ввести функцию $\varphi(\xi, \eta)$ [6, 8], такую, что

$$(2.2) \quad \vartheta(\xi, \eta) = \varphi^{-1} \partial \varphi / \partial \xi, \quad u(\xi, \eta) = 1 - \varphi^{-1} \partial \varphi / \partial \eta$$

тогда из (1.12) и (1.14) получаем

$$(2.3) \quad \partial^2 \varphi / \partial \xi \partial \eta = 0, \quad \varphi(\xi, \eta) = A(\eta) + B(\xi)$$

Здесь A и B — произвольные функции.

Удовлетворяя условиям (1.9) и (1.10), с учетом (2.2) из общего решения (2.3) имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A(\eta) &= (A_0 + B_0) \exp \eta - B_0 \\ B(\xi) &= (A_0 + B_0) \exp \xi - A_0 \quad \xi \leq 0 \end{aligned}$$

где A_0 и B_0 — отличные от нуля постоянные.

Из (2.2) следует

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \vartheta(\xi, \eta) &= \begin{cases} \exp(\xi) [\exp \xi + \exp \eta - 1]^{-1}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \\ u(\xi, \eta) &= \begin{cases} (\exp \xi - 1) [\exp \xi + \exp \eta - 1]^{-1}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

В следующем параграфе будет рассмотрен более общий случай, включающий (2.1).

Теперь положим

$$(2.6) \quad m=n=1/2$$

Введем функцию $f(\xi, \eta)$, такую, что

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= 1 - f^2(\xi, \eta) \\ \vartheta(\xi, \eta) &= 4(\partial f / \partial \xi)^2 \end{aligned}$$

Тогда из (1.14) имеем

$$(2.8) \quad 4 \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = -|f| \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|$$

Без ограничения общности можно положить, что f положительна, тогда как $\partial u / \partial \xi = -2f \partial f / \partial \xi \geq 0$, то $\partial f / \partial \xi = 0$.

Поэтому из (2.8) получаем

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - f/4 = 0; \quad -1/2 \leq \frac{\partial f}{\partial \xi} \leq 0, \quad 0 \leq f \leq 1$$

Из (1.17) и (1.18) имеем условия, налагаемые на функцию $f(\xi, \eta)$

$$(2.10) \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi > 0, 0) = -1/2$$

$$(2.11) \quad f(\xi = 0, \eta) = 1$$

Так как $0 \leq u \leq 1$, то $0 \leq f \leq 1$ и решение (2.9) с условиями (2.10) и (2.11) имеет вид

$$(2.12) \quad f(\xi, \eta) = I_0(\sqrt{\xi\eta}) - \sqrt{\xi/\eta} I_1(\sqrt{\xi\eta})$$

$I_n(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента n -го порядка ($n=0; 1$).
С учетом (2.12) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left[I_0(\sqrt{\xi\eta}) - \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} I_1(\sqrt{\xi\eta}) \right]$$

откуда

$$(2.13) \quad u(\xi, \eta) = 1 - \left[I_0(\sqrt{\xi\eta}) - \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} I_1(\sqrt{\xi\eta}) \right]^2, \quad 0 \leq \xi \leq 2, \quad 0 \leq \eta \leq 2$$

$$(2.14) \quad \vartheta(\xi, \eta) = \left[I_0(\sqrt{\xi\eta}) - \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} I_1(\sqrt{\xi\eta}) \right]^2$$

В связи с громоздкостью решения при $2 < \xi$ и $2 < \eta$ здесь не приводятся.

3. Другие частные случаи. Рассмотрим теперь более общий случай

$$(3.1) \quad m=1; \quad 0 < n$$

Частным случаем является набор параметров (2.1). Введем функцию

$$(3.2) \quad U(\xi, \eta) = \int_0^\eta u(\xi, s) ds$$

Интегрируя по η от 0, имеем из (1.14)

$$(3.3) \quad \vartheta(\xi, \eta) = \{a(\xi) + (1-n)[U(\xi, \eta) - \eta]\}^{1/(1-n)}$$

Складывая (1.12) и (1.14), имеем после интегрирования по η

$$(3.4) \quad \vartheta(\xi, \eta) = b(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi, \eta)$$

где $a(\xi)$ и $b(\xi)$ — произвольные функции.

При $\eta=0$ по определению (3.2) $U(\xi, 0)=0$ и из граничного условия $\vartheta(\xi > 0, 0)=1$ имеем

$$(3.5) \quad a(\xi) = b(\xi) - 1, \quad \xi > 0$$

Исключая функцию $U(\xi, \eta)$ из (3.4), с помощью (3.3) имеем

$$(3.6) \quad \partial\vartheta/\partial\xi = \vartheta^n(1-\vartheta)$$

Интегрируя (3.6), получим

$$(3.7) \quad \xi = I(\vartheta(\xi, \eta)) - g(\eta); \quad u(\xi, \eta) = 1 + (1-\vartheta) \frac{dg}{d\eta}$$

$$(3.8) \quad I(z) = \int^z s^{-n}(1-s)^{-1} ds$$

Отметим, что функция $\vartheta(\xi, \eta)$ зависит только от комбинации $\xi + g(\eta)$. При $n \geq 1$ функция $g(\eta) = I(\vartheta(0, \eta))$. Если же $0 < n < 1$, то при $0 < \eta < (1-n)^{-1}$ функция $g(\eta) = I(v(0, \eta))$, а при $\eta \geq (1-n)^{-1}$, как это следует из (3.7), функция $g(\eta) = -\omega_+(\eta)$, тогда из условия $\vartheta(\omega_+(\eta), \eta) = u(\omega_+(\eta), \eta) = 0$ с учетом (3.7) имеем

$$(3.9) \quad d\omega_+/d\eta - 1 = 0, \quad \omega_+((1-n)^{-1}) = 0$$

откуда

$$\omega_+(\eta) = -(1-n)^{-1} + \eta; \quad \eta \geq (1-n)^{-1}$$

При $\eta \geq (1-n)^{-1}$

$$u(\xi, \eta) = \vartheta(\xi, \eta) = F(\xi - \omega_+(\eta))$$

При $t \rightarrow \infty$ (1.7)–(1.10) решение стремится к стационарной волне, распространяющейся со скоростью $(1+\varepsilon)^{-1}$. В качестве примера рассмотрим случай $n = 1/2$. При этом

$$(3.10) \quad \vartheta(\xi, \eta) = \begin{cases} \text{th}^2 \left[\frac{\xi + \ln((4-\eta)/\eta)}{2} \right], & 0 < \eta < 2 \\ \text{th}^2 \left[\frac{\xi - \eta + 2}{2} \right], & 2 < \eta; \quad \omega_+(\eta) < \xi \\ 0, & 0 \leq \xi \leq \omega_+(\eta), \quad 2 < \eta \end{cases}$$

$$u(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\eta(4-\eta)} \text{ch}^{-2} \left[\frac{\xi + \ln((4-\eta)/\eta)}{2} \right]; & 0 < \eta < 2 \\ \text{th}^2 \left[\frac{\xi - \eta + 2}{2} \right]; & 2 < \eta; \quad \omega_+(\eta) < \xi \\ 0; & 0 \leq \xi \leq \omega_+(\eta); \quad 2 < \eta \end{cases}$$

$$\omega_+(\eta) = \eta - 2$$

Аналогично можно изучить и случай $n=1$, $0 < m$. При этом

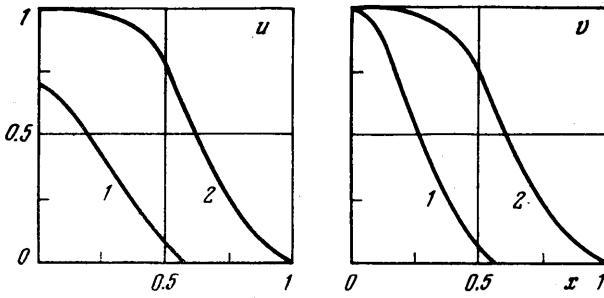
$$(3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -u(1-u)^m$$

$$\eta = I(u(\xi, \eta)) - f(\xi); \quad I(z) = - \int^z s^{-1}(1-s)^{-m} ds$$

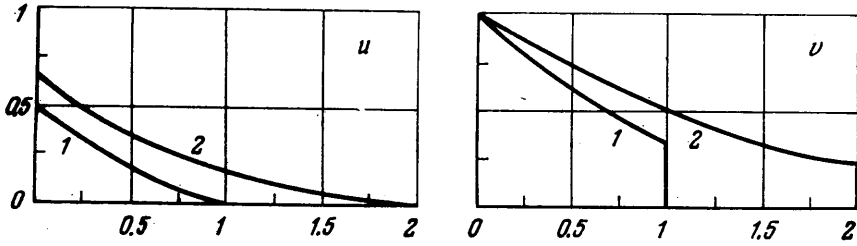
$$\vartheta(\xi, \eta) = -u f / d\xi$$

При $m \geq 1$, $f(\xi) = I(u(\xi, 0))$. Если же $0 < m < 1$, то тогда $f(\xi) = I(u(\xi, 0))$ при $0 < \xi < (1-m)^{-1}$, а при $(1-m)^{-1} \leq \xi$ функция $f(\xi) = -\omega_-(\xi)$, где $\omega_-(\xi)$ — задний фронт волны $\vartheta(\xi, \omega_-(\xi)) = u(\xi, \omega_-(\xi)) = 1$. Тогда с учетом (3.11) имеем

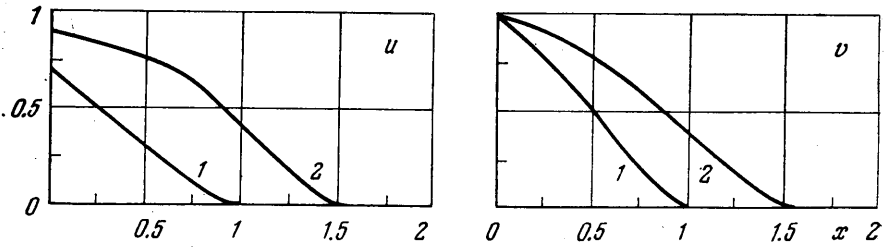
$$(3.12) \quad \omega_-(\xi) = \xi - (1-m)^{-1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В качестве примера рассмотрим случай $n=1$; $m=1/2$, тогда

$$u(\xi, \eta) = \begin{cases} \text{ch}^{-2} \left[\frac{-\eta + \ln((4-\xi)/\xi)}{2} \right], & 0 < \xi < 2 \\ \text{ch}^{-2} \left[\frac{\xi - \eta - 2}{2} \right], & 2 < \xi; \quad \omega_-(\xi) < \eta \\ 1, & 0 \leq \eta \leq \omega_-(\xi), \quad 2 < \xi \end{cases}$$

$$\vartheta(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{4}{(4-\xi)\xi} \text{ch}^{-2} \left[\frac{\eta + \ln((4-\xi)/\xi)}{2} \right], & 0 < \xi < 2 \\ \text{ch}^{-2} \left[\frac{\xi - \eta - 2}{2} \right], & 2 < \xi; \quad \omega_-(\xi) < \eta \\ 1, & 0 \leq \eta \leq \omega_-(\xi); \quad 2 < \xi \end{cases}$$

$$\omega_-(\xi) = \xi - 2$$

Проанализируем, например, случай $0 < n < 1$, $m = 1$. При этом сначала по реактору распространяется волна со скоростью 1, на фронте которой вещество ϕ терпит разрыв, при $t = \varepsilon^{-1}(1-n)^{-1}$ этот разрыв исчезает и начинает распространяться составная волна, передняя часть которой, заключенная между точками $x = \varepsilon^{-1}(1-n)^{-1}$ и $x = t + (1-n)^{-1}/(1+\varepsilon)$, распространяется, не искажаясь, со скоростью $(1+\varepsilon)^{-1}$ и в каждый момент времени является частью стационарной волны. Задняя часть этой волны, заключенная между $x = 0$ и $x = \varepsilon^{-1}(1-m)^{-1}$, изменяется во времени и при $t \rightarrow \infty$ ϕ и u на этом участке стремятся к единице.

При помощи этого метода удалось построить решения уравнений, описывающих массообмен в зернистом слое [9] и обменные процессы в каталитическом реакторе [10, 11]. Случаи $n = m = 1$ и $n = 1$, $m = 1/2$ рассматривались в работе [7].

Ряд вариантов, рассчитанных численными методами, представлен на фиг. 1-3.

Расчеты производились по методу, использованному в [2].

Эта схема дает высокий порядок точности. Так, при расчетах с шагами по пространственной переменной и по времени 0.01 ошибка на разрыве была менее 0.5%.

Разбиения пространственной переменной и времени для вариантов, представленных на фигурах, равнялись $\Delta x = 0.02$ и $\Delta t = 0.02$. Значения параметров следующие: фиг. 1 - $\varepsilon = 4$, $m = 0.5$, $n = 0.5$; фиг. 2 - $\varepsilon = 2$, $m = 2$, $n = 2$; фиг. 3 - $\varepsilon = 2$, $m = 1$, $n = 0.5$. Кривые 1 и 2 соответствуют $t = 1.0$ и 2.0.

Поступила 20 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Арис Р. Анализ процессов в химических реакторах. Л., «Химия», 1967.
2. Галин Л. А., Чурмаев О. М. Некоторые вопросы движения пузырьков газа в слое жидкости при наличии диффузии и химических реакций. ПМТФ, 1974, № 1.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1977.
4. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. Ж. физ. хим., 1946, т. 20, вып. 10.
5. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
7. Пеньковский В. И. Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большими значениями критерия Пекле. ПМТФ, 1969, № 2.
8. Thomas H. C. Heterogeneous ion exchange in a flowing system. J. Amer. Chem. Soc., 1944, vol. 66, No. 10.
9. Берман Ю. А., Нагаев Р. Ф. О диффузионном массообмене в неподвижном слое зернистого материала. ПММ, 1969, т. 33, № 2.
10. Bischoff K. B. General solution of equations representing effects of catalyst deactivation in fixed-bed reactors. Ind. and Eng. Chem. Fundament., 1969, vol. 8, No. 4.
11. Ozawa Y. Application of Legendre transformation to one-dimensional packed bed model. Chem. Eng. Sci., 1970, vol. 25, No. 3.