

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Н. Ф. ВОРОБЬЕВ

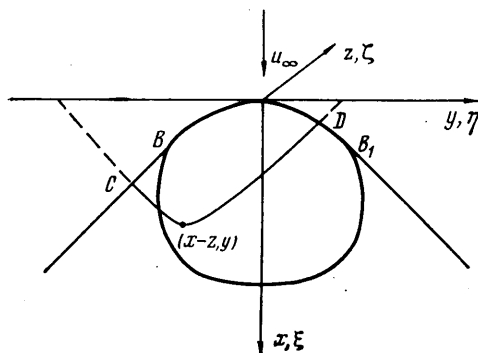
(Новосибирск)

Для крыла конечного размаха в рамках линейной теории на основе решения волнового уравнения в форме Вольтерра для сверхзвукового потока и на основе решения уравнения Лапласа в виде формулы Грина для дозвукового потока устанавливается соответствие решений прямой и обратной задач теории крыла. Для прямой задачи в случае сверхзвукового потока приводится формула для нахождения нагрузки на крыло, наиболее полно учитывающая особенности геометрии крыла. В обратной задаче для сверхзвукового и дозвукового потоков выведены формулы для нахождения геометрии крыла по заданным значениям нагрузки на крыле и изменения нагрузки по размаху крыла. Решение обратной задачи представляется в виде интегралов, сходящихся для внутренних точек поверхности крыла в смысле главного значения Коши, поверхность крыла при этом представляет собой вихревую поверхность взаимноортогональных вихревых линий. Обсуждаются условия конечности скоростей на кромках.

1. Линеаризованные уравнения газовой динамики в сверхзвуковом потоке газа могут быть сведены к волновому уравнению для потенциала скоростей [1, 2]

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} = 0$$

При решении задач обтекания сверхзвуковым потоком крыла конечного размаха в линейной постановке условия на поверхности крыла сносятся на базовую плоскость, мало отклоняющуюся от поверхности крыла. Примем плоскость $\zeta = 0$ совпадающую с базовой плоскостью крыла, ось ξ в базовой плоскости совпадающей с проекцией вектора скорости невозмущенного потока на базовую плоскость, а начало координат совпадающим с проекцией на плоскость $\zeta = 0$ наиболее выдвинутой вверх по потоку точки крыла (фигура).



Потенциал скорости возмущенного потока в точке $M(x, y, z)$, лежащей в области возмущения слабоизогнутого крыла, определяется формулой Вольтерра [1, 2]

$$(1.1) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S(x, y, z)} \left(w \frac{\partial \Phi}{\partial N} - \Phi \frac{\partial w}{\partial N} \right) dS$$

$$w = \ln \left\{ \left[(x - \xi) - r \right] / \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \right\}$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - (z - \zeta)^2}$$

где S — область зависимости точки M на базовой плоскости $\zeta = 0$, $\partial/\partial N$ — координатная производная.

Пределы интегрирования на плоскости $\zeta = 0$ по области зависимости $S(x, y, z)$ точки $M(x, y, z)$ имеют вид (фигура)

$$\iint_S d\eta d\xi = \int_0^{x_D} \int_{f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} d\eta d\xi + \int_{x_D}^{x_C} \int_{f_1(\xi)}^{\rho_+(\xi)} d\eta d\xi + \int_{x_C}^{x-z} \int_{\rho_-(\xi)}^{\rho_+(\xi)} d\eta d\xi$$

$$\iint_S d\xi d\eta = \int_{v_C}^{v_D} \int_{\psi(\eta)}^{\rho(\eta)} d\xi d\eta$$

Здесь $\eta = f(\xi)$, $\xi = \psi(\eta)$ — уравнение линии в плоскости $\zeta = 0$, ограничивающей область возмущенного потока, которая состоит из проекции на плоскость $\zeta = 0$ сверхзвуковой части передней кромки крыла и характеристических линий, касательных к проекции контура крыла на плоскость $\zeta = 0$ в точках перехода сверхзвуковой передней кромки в дозвуковую; $\eta = f_1(\xi)$, $\eta = f_2(\xi)$ — уравнения левой и правой частей линии $\eta = f(\xi)$; $\xi = \rho(\eta) = x - \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}$, $\eta = \rho_{\pm}(\xi) = y \pm \sqrt{(x - \xi)^2 - z^2}$ — уравнения следа характеристического конуса точки $M(x, y, z)$ в плоскости $\zeta = 0$, соответствующие уравнению $r = 0$; $x_C = x_C(x, y, z)$, $y_C = y_C(x, y, z)$, $x_D = x_D(x, y, z)$, $y_D = y_D(x, y, z)$ — координаты точек пересечения линии $\xi = \psi(\eta)$, $\eta = f(\xi)$ с линией $r = 0$.

На временно-подобной плоскости $\zeta = 0$ имеет место соотношение $(\partial/\partial N)_{\zeta=0} = (\partial/\partial \zeta)_{\zeta=0}$, а на поверхности крыла с точностью до малых второго порядка соотношение $(\partial\Phi/\partial N)_S = (\partial\Phi/\partial n)_S = (\partial\Phi/\partial \zeta)_{\zeta=0}$.

Используя свойства функции Вольтерра $w(x, y, z) = w(x, y, -z)$, $\partial w(x, y, z)/\partial z = -\partial w(x, y, -z)/\partial z$, можно методом компенсирующих особенностей [1, 2] в формуле (1.1) исключить член, зависящий от значения потенциала в плоскости $\zeta = 0$, и представить потенциал в виде

$$(1.2) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S w \frac{\partial \Phi}{\partial N} \Big|_{\zeta=0} dS = \Phi_1$$

или исключить член, зависящий от значения нормальной производной потенциала в плоскости $\zeta = 0$, и представить потенциал в виде

$$(1.3) \quad \Phi(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \Phi \frac{\partial w}{\partial N} \Big|_{\zeta=0} dS = \Phi_2$$

Причем, согласно (1.1)–(1.3), имеет место соотношение

$$(1.4) \quad \Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2, \quad \Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = F$$

Ядра интегральных операторов в формуле (1.1) $w|_{\zeta=0}$, $(\partial w/\partial \zeta)_{\zeta=0}$ являются решениями волнового уравнения. Сама функция w представляет собой первообразную функцию фундаментального решения $\varphi = r^{-1}$

$$(1.5) \quad w = \int \varphi d\xi$$

Решением волнового уравнения являются компоненты вектора

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = -\mathbf{i} \frac{x-\xi}{r^3} + \mathbf{j} \frac{y-\eta}{r^3} + \mathbf{k} \frac{z-\zeta}{r^3}$$

а также компоненты векторной первообразной функции

$$\begin{aligned} (1.6) \quad \mathbf{v} &= \int [\text{grad } \varphi \times d\mathbf{l}] = \int \left[\mathbf{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} d\zeta - \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\eta \right) + \right. \\ &+ \mathbf{j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} d\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi \right) \left. \right] = \\ &= \mathbf{i} (v_{ik} - v_{ij}) + \mathbf{j} (v_{ji} - v_{jk}) + \mathbf{k} (v_{kj} - v_{ki}) \\ v_{ik} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\zeta = - \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]} \\ v_{ij} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\eta = - \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r[(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2]} \\ v_{ji} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi = \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]} \\ v_{jk} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\zeta = \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]} \\ v_{kj} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\eta = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r[(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2]} \\ v_{ki} &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]} \end{aligned}$$

Решение волнового уравнения $v_{mn}(m, n=i, j, k)$ представляет собой слагаемое m -компоненты вектора скорости \mathbf{v} , индуцированное n -компонентой вихревой линии $d\mathbf{l}$. Особенности типа (1.6) и их комбинации в виде интегралов и производных входят как ядра в интегральные операторы, через которые определяется потенциал потока и его производные.

Формула (1.1) с учетом соотношений (1.2)–(1.6) и соотношений

$$(1.7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

может быть представлена в виде

$$(1.8) \quad \Phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left(\Phi_1' \int \varphi d\xi + \Phi \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi \right) dS = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$

Прежде чем дифференцировать по переменной x , надо второй член подынтегрального выражения, содержащий особенность на линии $r=0$, проинтегрировать по частям по переменной ξ . Тогда с учетом того, что на линии $\xi=\psi(\eta)$ потенциал возмущенного потока $\Phi[\psi(\eta), \eta]=0$, а на линии $\xi=\rho(\eta)$

$$(1.9) \quad \left[\iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta \right]_{\xi=\rho} = - \left[\frac{zr}{(y-\eta)^2 + z^2} \right]_{r=0} = 0$$

формула (1.8) примет вид

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \Phi_{\xi}' \int \varphi d\xi - \Phi_{\xi}' \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\xi \int dS = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$

После дифференцирования по переменной x с учетом соотношения $(\int \varphi d\xi)_{\xi=0} = 0$ и соотношений (1.7) формула (1.9) записывается в виде

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left(\Phi_{\xi}' \varphi - \Phi_{\xi}' \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi \right) dS = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$

Потенциал

$$(1.10) \quad \Phi_1 = -\frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi}' \varphi dS$$

определяет поле течения в возмущенной области потока через значение его нормальной производной $\Phi_{\xi}'|_{\xi=0}$ в базовой плоскости крыла. На поверхности крыла задано значение

$$\Phi_{\xi}'|_{\xi=0} = -u_{\infty} \cos(n\xi) = -u_{\infty} \sin \alpha = -u_{\infty} \alpha$$

где u_{∞} — скорость невозмущенного потока, n — нормаль к поверхности крыла, α — местный угол атаки элемента поверхности крыла.

На возмущенной части базовой плоскости $\xi=0$, лежащей вне крыла, значение $\Phi_{\xi}'|_{\xi=0}$ определяется в квадратурах через значения $\Phi_{\xi}'|_{\xi=0}$ на крыле из условий непрерывности давления [3]. Формула (1.10) дает решение прямой задачи определения параметров потока по заданной геометрии крыла конечного размаха [3].

Потенциал

$$(1.11) \quad \Phi_2 = \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi}' \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi dS$$

определяет поле течения в возмущенной области через значения его касательной производной $\Phi_{\xi}'|_{\xi=0}$ на базовой плоскости крыла. Согласно линеаризованному уравнению Бернулли [3], имеем

$$\Phi_{\xi}'|_{\xi=0} = p, \quad p = (p_{\xi=-0} - p_{\xi=+0}) / 2u_{\infty} \rho_{\infty}$$

где ρ_{∞} — плотность невозмущенного потока.

На базовой плоскости $\xi=0$ вне поверхности крыла величина $p=0$, и если на поверхности крыла задано распределение нагрузки, то формула (1.11) формально дает решение обратной задачи определения геометрии крыла по заданной нагрузке.

Таким образом, согласно (1.4), потенциал возмущенного потока $F = \Phi_1 + \Phi_2$ может быть представлен или в терминах прямой, или в терминах обратной задачи. Причем решению данной прямой задачи будет соответствовать решение обратной задачи в форме (1.11) с ядром интегрального оператора вида $v_{ji} = \int (\partial \varphi / \partial x) d\xi$. Существуют другие гидродинамические особенности, которые определяют потенциал возмущенного потока в терминах нагрузки на крыло. В этом можно убедиться, если исходить из представления крыла как поверхности, на которой расположены некоторые особенности.

Пусть на базовой плоскости $\xi=0$, на которую сносятся условия с поверхности крыла, расположены особенности типа

$$v_{ji} = \int (\partial \varphi / \partial z) d\xi, \quad v_{jk} = \int (\partial \varphi / \partial x) d\xi$$

соответственно с интенсивностями $c_{ji}(\xi, \eta)$, $c_{jk}(\xi, \eta)$. Потенциал возмущений в некоторой точке $M(x, y, z)$ области возмущений, создаваемой особенностями такого типа при условии равномерности набегающего потока и расположения крыла согласно схеме на фигуре, определяется соответственно по формуле

$$(1.12) \quad \Phi_{ji}(x, y, z) = \iint_S c_{ji}(\xi, \eta) v_{ji}(x, y, z, \xi, \eta, 0) d\eta d\xi = \Phi_2$$

$$(1.13) \quad \Phi_{jk}(x, y, z) = \iint_S c_{jk}(\xi, \eta) v_{jk}(x, y, z, \xi, \eta, 0) d\eta d\xi$$

где пределы интегрирования области зависимости точки $M(x, y, z)$ на плоскости $\zeta=0$ ограничим плоскостью $\xi=0$

$$0 \leq \xi \leq x-z, \quad y - \sqrt{(x-\xi)^2 - z^2} \leq \eta \leq y + \sqrt{(x-\xi)^2 - z^2}$$

На плоскости ξ, η введем новую систему координат [3] и формулы (1.12), (1.13) запишем в виде

$$(1.14) \quad \Phi_{ji} = z \int_0^{x-z} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{c_{ji}(\xi, y - \sqrt{(x-\xi)^2 - z^2} \cos \theta) (x-\xi)}{(x-\xi)^2 \cos^2 \theta + z^2 \sin^2 \theta} d\theta d\xi = \Phi_2$$

$$(1.15) \quad \Phi_{jk} = z \int_0^{x-z} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{c_{jk}(\xi, y - \sqrt{(x-\xi)^2 - z^2} \cos \theta) (x-\xi)}{(x-\xi)^2 \sin^2 \theta + z^2 \cos^2 \theta} d\theta d\xi$$

$$\xi = \xi, \quad \eta = y - \sqrt{(x-\xi)^2 - z^2} \cos \theta$$

Если потенциал (1.14), (1.15) продифференцировать по x , а затем перейти к пределу при $z \rightarrow 0$, то из предельного выражения определяется газодинамический смысл интенсивностей $c(\xi, \eta)$ особенностей такого типа:

$$c_{ji}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \Phi_{ji}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right]_{\zeta=0}, \quad c_{jk}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \Phi_{jk}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right]_{\zeta=0}$$

Потенциал Φ_{jk} , так же как и потенциал $\Phi_{ji} = \Phi_2$, определяется в терминах нагрузки $\Phi_{\xi'}|_{\zeta=0} = p$, но при одинаково заданной нагрузке на крыле параметры потока, определяемые потенциалами Φ_{jk} и Φ_{ji} , будут различны, так же как и параметры потока, определяемого комбинацией потенциалов $\Phi_{jk} \neq \Phi_{ji}$. Конфигурации крыла, задаваемого потенциалом Φ_1 прямой задачи, соответствует потенциал обратной задачи $\Phi_2 = \Phi_{ji}$.

Исходя из соответствия потенциала прямой задачи Φ_1 и потенциала обратной задачи в форме Φ_2 , $F = \Phi_1 = \Phi_2$, установим возможные связи между производной $\Phi_{\zeta'}|_{\zeta=0}$ и касательной производной $\Phi_{\xi'}|_{\zeta=0}$ на базовой плоскости $\zeta=0$, которая для волнового уравнения является поверхностью временно-ориентированного типа.

При нахождении параметров потока, определяемого потенциалами Φ_1 , Φ_2 в форме (1.10), (1.11), прежде чем дифференцировать двойные интегралы, содержащие особенности, необходимо в них проводить операции интегрирования по частям по одной из переменных, чтобы трансформировать формулы к виду, содержащему в подынтегральных выражениях ядра с меньшим порядком особенности, чем ядра исходных выражений. Так, например, потенциал Φ_1 в форме (1.10) не допускает даже формального проведения операции дифференцирования по x без предварительного интегрирования по частям из-за наличия особенностей на границах области зависимости [3]. Потенциал Φ_2 , существующий во всей возмущенной области, если его взять в виде (1.14), можно дифференцировать по z без

предварительного интегрирования по частям. После проведения в формуле (1.14) операций дифференцирования по z и перехода к пределу при $z \rightarrow 0$ можно определить формальную связь между значениями $\Phi_{\xi}'|_{z=0}$ и $\Phi_{\eta}'|_{z=0}$ в виде

$$\Phi_{2z}'|_{z=0} = -\Phi_{1z}'|_{z=0} + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{\Phi_{\xi}'|_{z=0}(x-\xi)}{(y-\eta)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} d\eta d\xi$$

Здесь интеграл, стоящий в правой части, расходится, хотя в некоторых работах по аэродинамике крыла этот интеграл используется для расчетов в смысле главного значения по Адамару (см., например, [4] и более поздние работы).

Операция предварительного интегрирования по частям по переменной ξ или η в силу гиперболического характера зависимостей может различным образом произвести понижение порядка (частичное сглаживание) особенностей в ядрах потенциалов (1.10), (1.11). Как будет видно ниже, предварительное интегрирование по переменной ξ по сравнению с предварительным интегрированием по η в случае потенциала Φ_1 приводит к настолько сильному сглаживанию ядра, что производная потенциала Φ_{1z}' не отражает всех особенностей возмущенного потока, а в случае потенциала Φ_2 не обеспечивает необходимой степени сглаживания ядра для существования производной $\Phi_{2z}'|_{z=0}$. Кроме того, выбор предварительного интегрирования по частям по тому или другому направлению определяет выбор терминов, в которых будет решаться задача.

Так, если формулы (1.10), (1.11) определяли прямую и соответственно обратную задачи теории крыла в терминах только первых производных потенциала скорости на крыле, то трансформированные формулы, в которых понижена степень особенностей в ядрах интегральных операторов, определяют потенциал потока еще и в терминах вторых производных потенциала на поверхности крыла. Причем для прямой задачи, согласно (1.10), выбор предварительного интегрирования по переменной η приводит к появлению в качестве определяющего задачу термина производной $\Phi_{z\eta}''|_{z=0}$, которая на крыле определяет изменение местного угла атаки элемента крыла по размаху, крутку крыла; выбор же предварительного интегрирования по переменной ξ приводит к появлению производной $\Phi_{z\xi}''|_{z=0}$, которая на крыле означает изменение местного угла атаки вдоль хорды крыла, кривизну крыла.

Для обратной задачи, согласно (1.11), выбор предварительного интегрирования по переменной η приводит к появлению в качестве определяющего задачу термина производной $\Phi_{\xi\eta}''|_{z=0}$, которая на крыле означает изменение нагрузки вдоль размаха крыла, выбор же предварительного интегрирования по переменной ξ приводит к появлению производной $\Phi_{\xi\xi}''|_{z=0}$, которая на крыле означает изменение нагрузки вдоль хорды крыла.

После проведения интегрирования по частям по переменной η с учетом соотношений

$$(1.16) \quad \int \varphi d\eta = -\frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - z^2}} \right], \quad \left(\int \varphi d\eta \right)_{\eta=\rho_{\pm}(\xi)} = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{(x-\xi)^2 (y-\eta)^2 - z^2 r^2}{(x-\xi)^2 (y-\eta)^2 + z^2 r^2}$$

$$\left(\iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta \right)_{r=0} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & \eta = \rho_+(\xi) \\ -\frac{5\pi}{4}, & \eta = \rho_-(\xi) \end{cases}$$

операторы Φ_i ($i=1, 2$) принимают вид

$$(1.17) \quad \Phi_1 = -\frac{1}{2} \int_{x_D}^{x-z} (\Phi_{\zeta'})_{\eta=\rho_+(\xi)} d\xi - \frac{1}{2} \int_{x_C}^{x-z} (\Phi_{\zeta'})_{\eta=\rho_-(\xi)} d\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} \left(\Phi_{\zeta'} \int \varphi d\eta \right)_{\eta=f(\xi)} d\xi + \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\zeta\eta}'' \int \varphi d\eta dS$$

$$(1.18) \quad \Phi_2 = -\frac{1}{4} \int_{x_D}^{x-z} (\Phi_{\xi'})_{\eta=\rho_+(\xi)} d\xi + \frac{5}{4} \int_{x_C}^{x-z} (\Phi_{\xi'})_{\eta=\rho_-(\xi)} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} \left(\Phi_{\xi'} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta \right)_{\eta=f(\xi)} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\eta}'' \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta dS$$

После интегрирования по частям по переменной ξ с учетом соотношений

$$(1.19) \quad \int \varphi d\xi = \ln \{ [(x-\xi)-r] / \sqrt{(y-\eta)^2+z^2} \}, \quad \left(\int \varphi d\xi \right)_{\xi=\rho(\eta)} = 0 \\ \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta = zr / [(y-\eta)^2+z^2], \quad \left(\iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta \right)_{\xi=\rho(\eta)} = 0$$

операторы Φ_i ($i=1, 2$) принимают вид

$$(1.20) \quad \Phi_1 = \frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} \left(\Phi_{\zeta'} \int \varphi d\xi \right)_{\xi=\psi(\eta)} d\eta + \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\zeta\eta}'' \int \varphi d\xi dS$$

$$(1.21) \quad \Phi_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} \left(\Phi_{\xi'} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta \right)_{\xi=\psi(\eta)} d\eta - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\eta}'' \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\xi d\eta dS$$

В прямой задаче крыла определяемым газодинамическим параметром потока является величина давления в потоке $\Phi_{x'}$, пропорциональная производной потенциала скорости. Проведя операцию дифференцирования по x в формуле (1.17) с учетом соотношений (1.7), (1.16) и в формуле (1.20) с учетом соотношений (1.7), (1.19), получим

$$(1.22) \quad \Phi_{ix'} = -\Phi_{\zeta'}(x-z, y, 0) - \frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} \left(\Phi_{\zeta'} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\eta \right)_{\eta=f(\xi)} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\zeta\eta}'' \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\eta dS$$

$$(1.23) \quad \Phi_{ix'} = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{свод}}} (\Phi_{\zeta'} \varphi)_{\xi=\psi(\eta)} d\eta - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\zeta\eta}'' \varphi dS$$

Ранее рассматривалась [3] формула (1.23), согласно которой давление в точке $M(x, y, z)$ возмущенной области зависит от распределения углов атаки на сверхзвуковой части передней кромки крыла (значение $\Phi_{\xi'}'|_{z=0}$ на головной характеристике CB равно нулю) и от производной $\Phi_{\xi\xi}''|_{z=0}$ (кривизны крыла на самой поверхности крыла) во всей области зависимости $S(x, y, z)$. Влияние крутки крыла формулой (1.23) не учитывается.

Согласно формуле (1.22), давление в точке $M(x, y, z)$ возмущенной области зависит от значения местного угла атаки в точке $M_0(x-z, y, 0)$, распределения углов атаки на сверхзвуковой части передней кромки крыла и от распределения производной $\Phi_{\xi\eta}''|_{z=0}$ (крутки крыла на самой поверхности крыла) во всей области зависимости $S(x, y, z)$. Хотя в формулу (1.22) явно не входит значение $\Phi_{\xi\xi}''|_{z=0}$ (кривизна крыла), но кривизна крыла учитывается наличием в формуле местного угла атаки в точке M_0 (при $z=0$ точки M и M_0 совпадают). Таким образом, формула (1.22) для расчета давления более полно учитывает особенности геометрии крыла.

На базовой плоскости $z=0$ формулы (1.22), (1.23) определяют зависимость касательной производной $\Phi_{ix}'|_{z=0}$ и нормальной производной $\Phi_z'|_{z=0}$

$$(1.24) \quad \Phi_{ix}'|_{z=0} = -\Phi_z'|_{z=0} - \frac{1}{\pi} \int_{L_{свод}} \left[\Phi_{\xi'}' \frac{(y-\eta)}{r(x-\xi)} \right]_{\eta=f(\xi)} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\eta}'' \frac{(y-\eta)}{r(x-\xi)} dS$$

$$(1.25) \quad \Phi_{iz}'|_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{свод}} (\Phi_{\xi'}' r^{-1})_{\xi=\psi(\eta)} d\eta - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\xi}'' r^{-1} dS$$

Интегралы в формуле (1.24), где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$, имеют, так же как и интегралы в формуле (1.25) при $(x-\xi) \rightarrow 0$, $(y-\eta) \rightarrow 0$, особенность порядка r^{-1} при $r \rightarrow 0$ и существуют в областях на базовой плоскости, в которых величины $\Phi_{\xi'}'|_{z=0}$, $\Phi_{\xi\xi}''|_{z=0}$ ограничены.

В обратной задаче крыла определяемым газодинамическим параметром потока является величина нормальной составляющей потенциала к поверхности крыла $\Phi_z'|_{z=0}$. Проведя операцию дифференцирования по z в формуле (1.18) с учетом соотношений (1.7), (1.16) и в формуле (1.21) с учетом соотношений (1.7), (1.19), получим

$$(1.26) \quad \Phi_{2z}' = -\Phi_{\xi'}'(x-z, y, 0) + \frac{1}{\pi} \int_{L_{свод}} \left(\Phi_{\xi'}' \iint \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} d\xi d\eta \right)_{\eta=f(\xi)} d\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\eta}'' \iint \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} d\xi d\eta dS$$

$$(1.27) \quad \Phi_{2z}' = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{свод}} \left(\Phi_{\xi'}' \iint \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} d\xi d\xi \right) d\eta - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\xi}'' \iint \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} d\xi d\xi dS$$

Здесь под знаками интегралов особенности имеют вид

$$\iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} d\xi d\eta = \frac{(x-\xi)(y-\eta)(r^2-z^2)}{r[(y-\eta)^2+z^2][(x-\xi)^2-z^2]}$$

$$\iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} d\xi d\xi = \frac{z^2(x-\xi)^2-r^2(y-\eta)^2}{r[(y-\eta)^2+z^2]^2}$$

причем, используя уравнение $\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}=0$ и соотношения (1.7), можно установить, что

$$\iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} d\xi d\eta = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\eta + \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\xi = -v_{kj} + v_{ki}$$

В линейных интегралах формул (1.26), (1.27) интегрирование должно проводиться только по сверхзвуковой части передних кромок (по $L_{\text{вон}}$), так как на головной характеристической поверхности вне сверхзвуковых кромок крыла (на линии CB) величина $\Phi_{\xi}'|_{\zeta=0}=p=0$.

На базовой плоскости $z=0$ формулы (1.26), (1.27) определяют зависимость нормальной производной $\Phi_z'|_{z=0}$ от касательной производной $\Phi_x'|_{z=0}$

$$(1.28) \quad \Phi_{zz}'|_{z=0} = -\Phi_{\xi}'|_{\zeta=0} + \frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{вон}}} \left[\Phi_{\xi}' \frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} \right]_{\eta=f(\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\eta}'' \frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} dS$$

$$(1.29) \quad \Phi_{zz}'|_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{\text{вон}}} \left[\Phi_{\xi}' \frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{(y-\eta)^2} \right]_{\xi=\psi(\eta)} d\eta -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint_S \Phi_{\xi\xi}'' \frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{(y-\eta)^2} dS$$

Интегралы в формуле (1.28) при условии непрерывности величин $(\Phi_{\xi}'|_{\zeta=0})_L$, $(\Phi_{\xi\eta}''|_{\zeta=0})_S$ существуют в смысле главного значения Коши для внутренних точек $M(x, y, 0)$ поверхности крыла S , не лежащих на контуре L . Интегралы в формуле (1.29) расходятся. Таким образом, решение обратной задачи определения геометрии крыла по заданной нагрузке дает формула (1.28).

2. Уравнения потенциального дозвукового течения несжимаемой жидкости, а также линеаризованные уравнения сжимаемого газа могут быть сведены к уравнению Лапласа. Формула Грина

$$(2.1) \quad \Phi^{\circ}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\varphi^{\circ} \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial n} - \Phi^{\circ} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial n} \right) dS$$

$$\varphi^{\circ} = r_0^{-1}, \quad r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная к поверхности S , представляет собой сумму потенциалов простого и двойного слоя [5]. В формуле Грина, используемой в линейной теории крыла, когда граничные условия сносятся на базовую плоскость $\zeta=0$, областью задания S граничных условий в случае дозвукового течения является вся плоскость $\zeta=0, S_{\infty}$.

Используя свойства симметрии фундаментального решения Φ° относительно плоскости $z=0$

$$\Phi^\circ(x, y, z) = \Phi^\circ(x, y, -z), \quad \partial\Phi^\circ(x, y, z)/\partial z = -\partial\Phi^\circ(x, y, -z)/\partial z$$

можно в формуле (2.1) разделить потенциал простого и двойного слоя

$$\Phi^\circ = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_\infty} (\partial\Phi^\circ/\partial\xi) \Phi^\circ dS = \Phi_1^\circ$$

$$\Phi^\circ = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_\infty} \Phi^\circ (\partial\Phi^\circ/\partial\xi) dS = \Phi_2^\circ$$

$$\Phi^\circ = (\Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ)/2, \quad F^\circ = \Phi_1^\circ = \Phi_2^\circ$$

Как и для решения волнового уравнения, в качестве решений рассматриваемых задач для уравнения Лапласа будем использовать компоненты вектора [4]

$$(2.2) \quad \mathbf{v}^\circ = \int [\text{grad } \Phi^\circ \times d\mathbf{l}] = \mathbf{i}(v_{ik}^\circ - v_{ij}^\circ) + \mathbf{j}(v_{ji}^\circ - v_{jk}^\circ) + \mathbf{k}(v_{kj}^\circ - v_{ki}^\circ)$$

Выражение для потенциала двойного слоя после интегрирования по частям по переменной ξ с учетом соотношения $\partial\Phi^\circ/\partial z = -\partial\Phi^\circ/\partial\xi$ приводится к виду

$$(2.3) \quad \Phi_2^\circ = -\frac{1}{2\pi} \left[\oint_{L_\infty} \left(\Phi^\circ \int \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial z} d\xi \right) d\eta - \iint_{S_\infty} \Phi_{\xi'}^\circ \int \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial z} d\xi dS \right]$$

$$\left(\int \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial z} d\xi \right)_{z=0} = \frac{z(x-\xi)}{r_0[(y-\eta)^2+z^2]}$$

Формула (2.3) определяет потенциал возмущенного потока в рамках линейной теории в терминах нагрузки, $\Phi_{\xi'}^\circ|_{z=0} = p$. На границе L_∞ , лежащей в бесконечности, потенциал возмущенного течения обращается в нуль, $(\Phi^\circ)_{L_\infty} = 0$, вне поверхности крыла значение $(\Phi_{\xi'}^\circ)_{z=0} = p = 0$, тогда в потенциале (2.3), определенном в терминах нагрузки, остается только двойной интеграл по области S , совпадающий с проекцией крыла на плоскость $\zeta=0$

$$(2.4) \quad \Phi_2^\circ = \frac{1}{2\pi} \iint_S \Phi_{\xi'}^\circ \iint \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial z} d\xi dS$$

Потенциал (2.4) существует при ограниченных значениях $\Phi_{\xi'}^\circ|_{z=0}$ всюду, в том числе при $z \rightarrow 0$, где он принимает ограниченное, отличное от нуля значение. Производная потенциала (2.4) по z

$$(2.5) \quad \Phi_{2z}^\circ = \frac{1}{2\pi} \iint_S \Phi_{\xi'}^\circ \int \frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial z^2} d\xi dS$$

$$\int \frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial z^2} d\xi = \frac{(x-\xi)}{r_0[(y-\eta)^2+z^2]} - z^2(x-\xi) \frac{[(y-\eta)^2+z^2]+2r_0^2}{[(y-\eta)^2+z^2]^3}$$

$$\left(\int \frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial z^2} d\xi \right)_{z=0} = \frac{(x-\xi)}{(y-\eta)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

при $z=0$ соответствует известной формуле линейной теории крыла в дозвуковом потоке [7].

Хотя интеграл, стоящий в правой части формулы (2.5), расходится при $z=0$, он использовался в расчетах в смысле главного значения по Адамару [7]. Приведем формулу (2.5) к виду, содержащему в интегральных операторах ядра с пониженной степенью особенности и представляющему значение производной потенциала по z в потоке в терминах производной нагрузки на крыло по размаху. После интегрирования по частям по переменной η формула (2.5) принимает вид

$$(2.6) \quad \Phi_{z z'} = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_L (\Phi_{\xi}^{\circ'} \iint \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial z^2} d\xi d\eta)_{\eta=f(\xi)} d\xi - \iint_S \Phi_{\xi\eta}^{\circ''} \iint \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial z^2} d\xi d\eta dS \right] \\ \iint \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial z^2} d\xi d\eta = - \iint \left(\frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{\circ}}{\partial y^2} \right) d\xi d\eta = \\ = \int \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial x} d\eta + \int \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial y} d\xi = v_{k_j}^{\circ} + v_{k_i}^{\circ} = \frac{(x-\xi)(y-\eta)(r_0^2+z^2)}{r_0[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2r_0^2]}$$

где $\eta=f(\xi)$ — уравнение контура крыла L .

При условии непрерывности величин $(\Phi_{\xi}^{\circ'}|_{z=0})_L$, $(\Phi_{\xi\eta}^{\circ''}|_{z=0})_S$ при $z \rightarrow 0$ интегралы в правой части уравнения (2.6) существуют в смысле главного значения Коши для внутренних точек $M(x, y, 0)$ поверхности крыла, не лежащих на контуре L . При $z=0$ формула (2.6) представляет собой уравнение поверхности крыла, определяемое по распределению нагрузки по контуру крыла L и распределению производной нагрузки по размаху на всей поверхности крыла S

$$(2.7) \quad \Phi_{z z'}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_L \left[\Phi_{\xi}^{\circ'} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} \right]_{\eta=f(\xi)} d\xi - \iint_S \Phi_{\xi\eta}^{\circ''} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} dS \right\}$$

В интегралах в (2.7) ядра представляют собой, согласно (2.2), сумму $(v_{k_i}^{\circ} + v_{k_j}^{\circ})$, как и в случае формулы (1.28) для сверхзвукового потока, где ядра представляют сумму $(v_{k_i} - v_{k_j})$. Величина $v_{k_i}^{\circ}$, $v_{k_j}^{\circ}$ (v_{k_i} , v_{k_j}) представляет собой слагаемое компоненты скорости v по направлению оси k , индуцированное отрезком вихревой линии направления $i(j)$, лежащим в базовой плоскости крыла $\xi=0$. Таким образом, уравнения (1.28), (2.7) представляют собой уравнения вихревой поверхности крыла, состоящей из семейств взаимноортогональных вихревых линий, совпадающих с направлением ортов i, j . Плотность вихревой поверхности крыла $\rho(\xi, \eta)$ пропорциональна нагрузке на элемент крыла, $\rho \sim \Phi_{\xi}^{\circ'}|_{z=0} = p$.

В работе [8], где рассматривался вопрос о сходимости дискретной схемы, в качестве дискретных вихревых линий были выбраны П-образные линии, отрезки которых совпадают с направлением ортов i, j ; было показано, что при бесконечном увеличении числа дискретных вихрей значение скорости на крыле, индуцированной присоединенными вихрями, определяется формулой, совпадающей с формулой (2.7).

Необходимым условием конечности интегралов в смысле главного значения Коши в формулах (1.28), (2.7), определяющих величину нормальной производной скорости к поверхности крыла, для точек $M(x, y, 0)$, лежащих на контуре L , является обращение на контуре L в нуль величины вихревой плотности ρ (нагрузки $\Phi_{\xi}^{\sigma'}|_{\xi=0}=\rho$) и величины производной вихревой плотности по размаху $\rho_{\eta}'(\Phi_{\xi\eta}^{\sigma''}|_{\xi=0}=\rho_{\eta}')$ или непрерывное продолжение вихревой поверхности крыла за пределы рассматриваемой области, т. е. построение вихревой схемы крыла со сходом вихревой пелены с кромок крыла. Требование обращения в нуль величин $(\rho)_L, (\rho_{\eta}')_L$ приводит к построению крыла с нулевой нагрузкой по кромкам крыла. Обычная схема крыла в линейной постановке, когда вихревая пелена сходит с задней кромки, обеспечивает условие конечности скорости (условия Жуковского) на задней кромке; на дозвуковых передних кромках в сверхзвуковом потоке и на кромках крыла в дозвуковом потоке, где нет схода вихревой пелены, величина скорости, нормальной к поверхности крыла, имеет особенность порядка $r^{-1/2}$ при $r \rightarrow 0$ [3, 9]. Рассмотрение картины обтекания крыла со сходом вихревой пелены со всех кромок проводится в рамках нелинейной схемы.

Представление решения обратной задачи крыла в виде сходящихся в смысле главного значения Коши интегралов позволяет значительно упростить алгоритм вариационной задачи нахождения крыла минимального сопротивления на основе линейной теории, так как при использовании представления решения в терминах нагрузок области интегрирования при нахождении газодинамических параметров потока и суммарных характеристик крыла ограничены всегда только поверхностью самого крыла.

Поступила 23 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1947, т. 11, № 3.
2. Воробьев Н. Ф. Обтекание сверхзвуковым потоком двух пересекающихся и двух параллельных крыльев. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1969, вып. 2, № 8.
3. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
4. Общая теория аэродинамики больших скоростей. Сер. Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника. М., Воениздат, 1962.
5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
6. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., «Наука», 1965.
7. Multhopp H. Methods for calculating the lift distribution of wings. London, H. M. Stat off., 1955. Aeronaut. Research. Council. Rept. and Mem., No. 2884.
8. Воробьев Н. Ф. О дискретной вихревой схеме крыла конечного размаха. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1972, вып. 3, № 13.
9. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.