

## О ЗАПАСЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ

М. А. СВЕЧКАРЕВА, А. Д. ТЮЦОВ

(Харьков)

В работе определяется запас устойчивости симметричных равновесных форм свободной поверхности жидкости, «подвешенной» в щели и подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. Вычисления выполнены в области изменения параметров — угла смачивания и числа Бонда, которая примыкает к границе области устойчивости.

**1. Постановка задачи.** Пусть жидкость находится в щелеобразном сосуде — тонком прямоугольном параллелепипеде, образованном двумя вертикальными прямоугольными пластинами размером  $a \times h$  и заключенной между ними прямоугольной рамкой размером  $a \times h \times d$  (фиг. 1).

Свободную поверхность жидкости (при рассмотрении ее равновесия и устойчивости) будем считать цилиндрической с горизонтальными образующими, перпендикулярными плоскости  $xy$ . Для этого предполагаем угол смачивания на пластинах равным  $\pi/2$ , а толщину щели  $d$  — малой по сравнению с шириной  $a$ . Кроме того, высоту  $h$  полагаем достаточно большой, чтобы свободная поверхность контактировала только с боковыми стенками.

Поперечное сечение  $\gamma$  свободной поверхности будем описывать функциями  $x(s)$ ,  $y(s)$ , а в качестве параметра  $s$  выберем длину дуги, отсчитываемую в направлении от левого конца этого сечения к правому (не фиксируя начала отсчета  $s$ ).

Потенциальная энергия жидкости выражается следующей формулой

$$(1.1) \quad U^* = \sigma d \left[ \int_{-}^{+} \left( 1 - \frac{\rho g}{2\sigma} y^2 x' \right) ds + \cos \alpha (y_- + y_+) \right]$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — угол смачивания на боковых стенках рамки (фиг. 1). Индексы «минус» и «плюс» указывают, что значения соответствующих величин берутся на левом и правом конце  $\gamma$ .

Равновесные кривые  $\gamma$  являются стационарными точками функционала  $U(\gamma)$  при условии, что количество жидкости в сосуде фиксировано. Это условие можно записать в виде равенства

$$(1.2) \quad \int_{-}^{+} y x' ds = 0$$

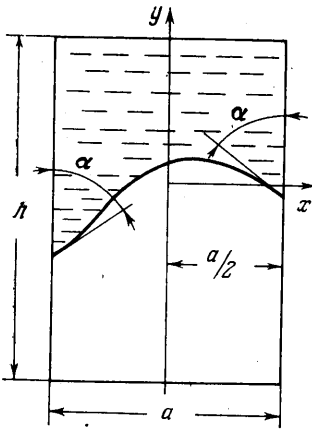
выбрав соответствующим образом положение начала координат относительно сосуда.

Форма равновесной кривой  $\gamma$  описывается следующей системой уравнений и граничных условий [1]:

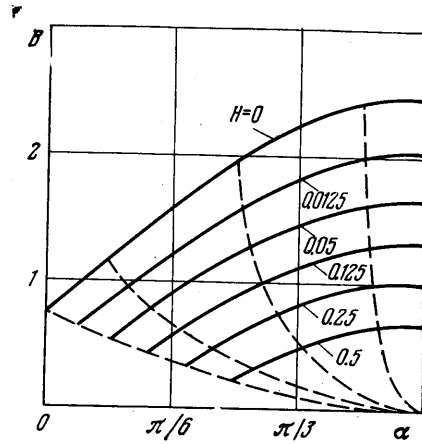
$$(1.3) \quad x'' = -y' \left( \frac{\rho g}{\sigma} y + c \right), \quad y'' = x' \left( \frac{\rho g}{\sigma} y + c \right)$$

$$(1.4) \quad -y'_- = y'_+ = -\cos \alpha, \quad -x_- = x_+ = a/2$$

Постоянную  $c$  легко определяем, интегрируя второе из уравнений (1.3) с учетом условий (1.2) и (1.4)  $c = -2 \cos \alpha / a$ . Задача о равновесных кривых  $\gamma$  содержит два независимых параметра: угол смачивания  $\alpha$  и число



Фиг. 1



Фиг. 2

Бонда  $B = \frac{1}{4} \rho g a^2 / \sigma$ . Известно, что при достаточно малых значениях  $B$  для каждого  $0 < \alpha < \pi$  существует устойчивая равновесная кривая  $\gamma(\alpha, B)$ , симметричная относительно оси  $y$ . Устойчивость теряется, когда число Бонда достигает критического значения  $B_*(\alpha)$ . Зависимость  $B_*(\alpha)$  схематически показана на фиг. 2, ей соответствует кривая  $H=0$ ,  $B_*(\pi/2 + \delta) = B_*(\pi/2 - \delta)$ .

Целью работы является нахождение величины запаса устойчивости, т. е. глубины потенциальной ямы, для симметричных равновесных кривых в некоторой области изменения параметров  $\alpha$  и  $B$ , которая примыкает к критической кривой  $B = B_*(\alpha)$  и будет уточнена в процессе решения задачи.

Для заданного устойчивого равновесного состояния  $\gamma(\alpha, B)$  запас устойчивости равен разности [2]

$$(1.5) \quad H(\alpha, B) = U^*(\gamma_H(\alpha, B)) - U^*(\gamma(\alpha, B))$$

где  $\gamma_H(\alpha, B)$  — стационарная точка — перевал, находящаяся на границе потенциальной ямы, соответствующей равновесному состоянию  $\gamma(\alpha, B)$ .

2. Преобразование к безразмерной форме. Далее удобнее работать в безразмерных переменных, к которым приведет замена

$$X = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x, \quad Z = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} \left( y + c \frac{\sigma}{\rho g} \right), \quad S = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} s, \quad U = \frac{U^*}{\sigma a d}$$

Тогда формула для потенциальной энергии будет такой

$$(2.1) \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{B}} \left[ \int_{s_-}^{s_+} \left( 1 - \frac{Z^2 X'}{2} \right) ds + \cos \alpha (Z_- + Z_+) - \frac{\cos^2 \alpha}{X_+} \right]$$

Система уравнений (1.3) и граничные условия (1.4) принимают вид

$$(2.2) \quad X'' = Z'Z, \quad Z'' = -X'Z$$

$$(2.3) \quad -Z_-' = Z_+' = -\cos \alpha, \quad -X_- = X_+ = \sqrt{B}$$

Пусть  $\beta(S)$  — угол между осью  $X$  и касательной к равновесной кривой в рассматриваемой точке,  $\cos \beta = X'$ ,  $\sin \beta = Z'$ . Тогда из уравнений (2.2) следует, что  $\beta' = -Z$ , а граничные условия (2.3) записываются в более удобной форме

$$-\beta_- = \beta_+ = \alpha - \pi/2, \quad -X_- = X_+ = \sqrt{B}$$

Система (2.2) допускает преобразование  $Z(S) \rightarrow -Z(S)$ . Если исходной кривой соответствовал угол смачивания  $\alpha_1 = \pi/2 - \delta$ , то новой кривой будет соответствовать  $\alpha_2 = \pi/2 + \delta$ . Потенциальная энергия (2.1) для обеих кривых принимает равные значения, т. е. функция  $U(\alpha, B)$  симметрична относительно прямой  $\alpha = \pi/2$ . Поэтому далее будем считать  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Согласно [1] каждая интегральная кривая системы (2.2) допускает произвольный сдвиг вдоль оси  $X$ , симметрична относительно своих точек перегиба, определяемых равенством  $Z=0$ , имеет хотя бы одну точку, в которой  $Z'=0$ , симметрична относительно вертикалей, проходящих через точки, в которых  $Z'=0$ .

**3. Энергия симметричных форм равновесия.** Симметричные относительно оси  $Z$  интегральные кривые определяются начальными условиями

$$(3.1) \quad Z(0) = Z_0, \quad Z'(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1$$

где  $Z_0$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При  $Z_0 = 0$   $Z(S) \equiv 0$ . Переход от  $Z_0 = A$  к  $Z_0 = -A$  влечет за собой замену  $Z(S) \rightarrow -Z(S)$ . Все остальные интегральные кривые получаются из симметричных с помощью сдвигов вдоль оси  $X$ .

В рассматриваемой задаче физический смысл имеют лишь такие участки интегральных кривых, которые не содержат точек самопересечения. Из вида граничных условий (2.3) и инвариантности интегральной кривой относительно сдвига следует, что любой (не содержащий точек самопересечения) отрезок какой-либо интегральной кривой системы (2.2), выбранный так, что для его концов выполняется условие  $Z_+' = -Z_-'$  и все его внутренние точки лежат в полосе  $X_- < X < X_+$ , является равновесной кривой, соответствующей значениям

$$B = [(X_+ - X_-)/2]^2, \quad \cos \alpha = -Z_+'$$

Этим фактом воспользуемся для вычисления потенциальной энергии равновесных состояний в достаточно широкой области изменения параметров  $\alpha$  и  $B$ . Зададим некоторое значение  $Z_0$  и будем интегрировать систему (2.2) с начальными условиями (3.1), уравнение (2.4) с начальным условием  $\beta(0) = 0$  и вспомогательную начальную задачу

$$V' = 1 - Z^2 X'/2, \quad V(0) = 0$$

Для каждого  $S \geq 0$  точку  $X(S)$ ,  $Z(S)$  будем считать правым концом симметричной (относительно оси  $Z$ ) равновесной кривой, для которой  $-S_- = S_+ = S$ ,  $\alpha(S) = \beta(S) + \pi/2$ ,  $\cos \alpha(S) = -Z'(S)$ ,  $B(S) = X^2(S)$ , а потенциальная энергия такова

$$U(S) = \left[ V(S) - Z(S)Z'(S) - \frac{Z'^2(S)}{2X(S)} \right] \frac{1}{X(S)}$$

Предельный переход при  $S \rightarrow 0$  дает  $U(0)=1$ . Если пары значений  $\alpha(S)$ ,  $B(S)$  нанести на фиг. 2, то получим кривую, выходящую из точки  $\alpha=\pi/2$ ,  $B=0$ . Так как  $\alpha'(S)=\beta'(S)=-Z(S)$ , то для выполнения принятого выше условия  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  нужно брать  $Z_0 \geq 0$ .

Процесс интегрирования будем вести до тех пор, пока кривая  $\alpha(S)$ ,  $B(S)$  не достигнет границы рассматриваемой области изменения параметров  $\alpha$  и  $B$ , т. е. до выполнения одного из условий:  $\alpha(S)=0$  ( $\beta(S)=-\pi/2$ );  $B(S)=B_*(\alpha(S))$ . При  $Z_0 \neq 0$  второе условие равносильно условию  $Z(S)=0$ , а при  $Z_0=0$  — условию  $X(S)=\pi/2$  [1].

Из приведенных в [1] графиков равновесных кривых ясно, что при  $|Z_0| \rightarrow \infty$  кривая  $\alpha(S)$ ,  $B(S)$  будет прижиматься к горизонтали  $B=0$ , при этом в исходных переменных  $x$  и  $y$  равновесные кривые превращаются в дуги окружностей. Для  $|Z_0|=20$  замена равновесной кривой  $X(S)$ ,  $Z(S)$  дугой окружности радиуса  $1/|Z_0|$  дает относительную погрешность в вычислении  $\alpha(S)$ ,  $B(S)$ ,  $U(S)$  не более 1% и уменьшается пропорционально  $1/Z_0^2$ .

Проведя указанные расчеты для различных  $Z_0$ , можно получить значения потенциальной энергии симметричных равновесных состояний жидкости на достаточно густой сетке точек  $(\alpha, B)$  в рассматриваемой области (фиг. 2).

**4. Энергия несимметричных форм равновесия.** Теперь перейдем к нахождению тех равновесных кривых, которые лежат на границах потенциальных ям симметричных равновесных состояний. Рассмотрение начнем с тех точек  $(\alpha, B)$ , которые лежат на критической кривой  $B=B_*(\alpha)$  или вблизи нее. При пересечении этой кривой для симметричных равновесных состояний происходит смена устойчивости на неустойчивость (или наоборот). При  $B=B_*(\alpha)$   $\min \delta^2 V = \lambda_{\min} = 0$ , где  $\lambda_{\min}$  — наименьшее собственное значение однородной линеаризованной краевой задачи для равновесных кривых [1].

Равенство  $\lambda_{\min} = 0$  означает, что соответствующая однородная линейная задача имеет нетривиальное решение. Поэтому при переходе через кривую  $B=B_*(\alpha)$  должно происходить ветвление равновесных состояний [3]. В рассматриваемой задаче симметричные равновесные состояния теряют устойчивость несимметричным образом [1]. Это значит, что ответвляющиеся состояния равновесия будут несимметричными. Если эти новые состояния равновесия будут появляться при входе в область устойчивости (исчезать при выходе из нее), то по крайней мере одно из них будет лежать на границе потенциальной ямы симметричного состояния равновесия с теми же параметрами  $\alpha$  и  $B$ .

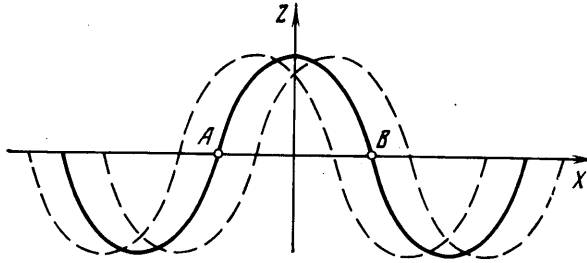
Перейдем к нахождению ответвляющихся несимметричных форм равновесия. Критические симметричные равновесные кривые на своих концах имеют точки перегиба, т. е. для них  $Z_- = Z_+ = 0$ . Интегрируя первое из уравнений (2.2) с учетом начальных условий (3.1) и условий  $Z=0$ ,  $X_+' = \cos \beta_+ = \sin \alpha$ , получим связь между параметрами  $\alpha$  и  $Z_0$  для критических равновесных кривых

$$(4.1) \quad \sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} Z_0^2$$

Изменению  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$  соответствует изменение  $Z_0$  от  $\sqrt{2}$  до 0. При таких  $Z_0$  на равновесных кривых  $Z$  является однозначной функцией от  $X$ :  $Z=f(X)$  [1]. Типичная форма симметричной интегральной кривой системы (2.2) при  $0 < Z_0 < \sqrt{2}$  показана на фиг. 3 сплошной линией. Участок ее, заключенный между двумя соседними точками перегиба  $A(X_1, 0)$  и  $B(X_2, 0)$ , может служить в рассматриваемой задаче критической равновесной кривой, для которой  $\alpha$  определяется из условия (4.1) и  $B = \frac{1}{4}(X_2 - X_1)^2 = X_2^2 = B_*(\alpha)$ .

Из симметрии интегральной кривой относительно точек перегиба и вертикалей, проходящих через точки с горизонтальной касательной ( $Z'=0$ ), следует, что на ней угол  $\beta=\varphi(X)$  является периодической функцией с полупериодом, равным  $2X_2$ , причем  $\varphi(X+2X_2)=-\varphi(X)$ . Поэтому при любом значении  $\Delta$  кривая  $Z=f(X+\Delta)$  ( $-X_2 < X < X_2$ ) будет также равновесной кривой с параметрами  $\alpha=\pi/2+\varphi(X_2+\Delta)$ ,  $B=X_2^2$ .

Таким образом, при произвольном сдвиге вдоль оси  $X$  критической симметричной равновесной кривой  $Z=f(X)$  опять получаем равновесные кривые с тем же значением числа Бонда, но с другими значениями угла



Фиг. 3

смачивания. Значениям  $\Delta$ , отличающимся только знаком, соответствуют равновесные кривые, взаимно симметричные между собой относительно оси  $Z$  (см. штриховые кривые на фиг. 3). Поэтому далее будем считать  $\Delta > 0$ .

С увеличением  $\Delta$  от 0 до  $X_2$  угол  $\alpha$  монотонно возрастает от начального значения  $\alpha_*(B)=\text{Arc sin}(1-1/2 Z_0^2)$  до  $\pi/2$ . При этом равновесная кривая, первоначально симметричная, с возрастанием  $Z_0$  превращается в антисимметричную, обладающую полярной симметрией относительно своих точек перегиба.

На фиг. 4 изображены части таких кривых с точкой перегиба в начале координат.

Итак, при входе в область устойчивости через ее границу  $B=B_*(\alpha)$  от семейства симметричных равновесных кривых ответвляются несимметричные равновесные кривые  $\gamma_n(\alpha, B)$ , причем каждой точке  $(\alpha, B)$  области, заключенной на фиг. 2 между кривой  $B=B_*(\alpha)$  и прямой  $B=B_*(0)$ , соответствует одна (с точностью до преобразования симметрии относительно оси  $Z$ ) несимметричная кривая. Эти кривые  $\gamma_n(\alpha, B)$  лежат на границе потенциальных ям симметричных равновесных кривых  $\gamma_c(\alpha, B)$  по крайней мере для точек  $(\alpha, B)$ , достаточно близких к критической кривой  $B=B_*(\alpha)$ .

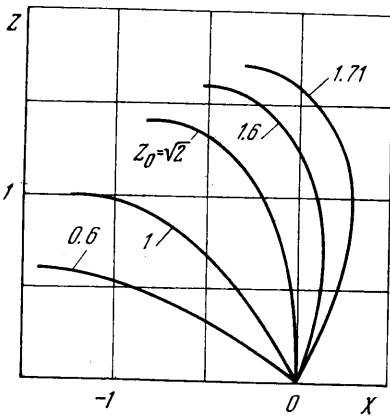
Теперь семейство несимметричных равновесных кривых  $\gamma_n(\alpha, B)$  попытаемся продолжить в область параметров  $\alpha$  и  $B$ , лежащую ниже прямой  $B=B_*(0)$ .

Сначала при фиксированном  $\alpha=\pi/2$  построим продолжение для показанного на фиг. 4 семейства кривых  $\gamma_n(\alpha, B)$  по числу Бонда. Эти кривые имеют точку перегиба в начале координат. Значениям  $B_*(0) \leq B \leq B_*(\pi/2)$  соответствуют  $0 \leq Z_0 \leq \sqrt{2}$ . С увеличением  $Z_0$  от 0 до  $\sqrt{2}$ , как видно из фиг. 4,  $B=X_+^2(Z_0)$  монотонно уменьшается от  $B_*(\pi/2)=X_+^2(0)$  до  $B_*(0)=X_+^2(\sqrt{2})$ . Очевидно, искомое продолжение семейства  $\gamma_n(\alpha, B)$  будут составлять кривые с точкой перегиба в начале координат и параметром  $Z_0 > \sqrt{2}$  (по крайней мере пока  $Z_0 - \sqrt{2}$  мало). Эти кривые показаны на фиг. 4, из которой видно, что процесс продолжения обрывается при  $Z_0=1.710122$ ,  $B=10^{-6}$ . При дальнейшем увеличении  $Z_0$  участок интеграль-

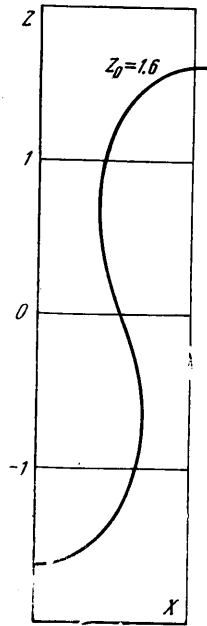
ной кривой, заключенной между двумя соседними точками с  $Z'=0$ , не будет лежать в полосе  $X_- \leq X \leq X_+$ .

Теперь интегральные кривые с параметром  $\sqrt{2} < Z_0 < 1.710122$  будем постепенно сдвигать вправо относительно начала координат, считая  $-X_-(Z_0) = X_+(Z_0) = \text{const}$ . Это позволит при постоянных  $B$  из интервала  $B(0) < B < 10^{-6}$  продолжить семейство  $\gamma_n(\alpha, B)$  в сторону  $\alpha < \pi/2$ , но тоже до определенного предела.

Полученная таким способом максимальная область изменения параметров  $\alpha$  и  $B$  ограничена снизу на фиг. 2 штриховой кривой. На некоторой



Фиг. 4



Фиг. 5

части этой области кроме описанных выше симметричных  $\gamma_c$  и несимметричных  $\gamma_n$  существуют и другие равновесные кривые — симметричные с двумя точками перегиба внутри (см. фиг. 5 для  $\alpha = \pi/2$ ). Но расчеты показали, что для них энергия имеет большие значения, чем для соответствующих  $\gamma_n$ . Таким образом, всюду в описанной области изменения  $\alpha$  и  $B$  семейство  $\gamma_n(\alpha, B)$  состоит из кривых, лежащих на границах потенциальных ям для  $\gamma_c(\alpha, B)$ .

Потенциальная энергия для поверхностей  $\gamma_n(\alpha, B)$  вычисляется по формуле

$$U(S) = \left[ V(S) - \frac{Z'^2}{2X(S_*)} \right] \frac{1}{X(S_*)}$$

которая легко получается из (2.1). Линии уровня запаса устойчивости равновесных состояний  $\gamma_c(\alpha, B)$  показаны на фиг. 2.

Поступила 10 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беллева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М., ВЦ АН СССР, 1968.
2. Мышкис А. Д. О ямах. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.