

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ КАПЛИ

Н. К. РАДЯКИН

(Харьков)

Рассматривается задача об определении частот и форм колебаний поверхностных волн жидкой капли, вращающейся в условиях невесомости. Для идеальной жидкости при вычислении частот колебаний на ЭВМ применяется метод Ритца к некоторому квадратичному функционалу. Для маловязкой жидкости, пользуясь методом пограничного слоя, получены формулы для декремента затуханий и поправок к частотам колебаний. Результаты расчетов представлены в виде графика и таблицы.

1. Постановка задачи. Пусть жидкая капля равномерно вращается в условиях невесомости с постоянной угловой скоростью $\epsilon_0 = \epsilon_0 \mathbf{k}$, где \mathbf{k} — орт оси вращения, а $\epsilon_0 > 0$. Рассмотрим задачу о малых свободных колебаниях капли около ее равновесной формы. Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве характерных величин плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ и линейный размер $l = V^{1/3}$, где V — объем жидкости. Уравнения и граничные условия запишем в цилиндрической системе координат $\mathbf{x} = (r, \varphi, z)$, равномерно вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью $\epsilon_0 \mathbf{k}$. Тогда при равновесии поле скоростей будет нулевое, а поле давления $p_0 = p_0(\mathbf{x})$ равно $p_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 r^2 + c$, $\epsilon = \epsilon_0 (\rho l^3 / \sigma)^{1/2}$.

Рассматривая малые нормальные движения жидкости, сохраняющие центр масс, будем считать, что поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и функция $p(\mathbf{x}, t)$ отклонения поля давлений от равновесного давления $p_0(\mathbf{x})$ зависят от времени по закону

$$(1.1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(-\lambda t), \quad p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) \exp(-\lambda t)$$

Для функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ имеем следующие уравнения и граничные условия [1, 2]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} -\lambda \mathbf{u} + 2\epsilon \mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \\ \nu(u_{1,3} + u_{3,1}) &= \nu(u_{2,3} + u_{3,2}) = 0, \quad -p + 2\nu u_{3,3} = \lambda^{-1} B^\circ u_n \\ B^\circ &\stackrel{\text{def}}{=} \left[-K_1^2 - K_2^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial n} \right)_\Gamma + \Delta_\Gamma \right], \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \mathbf{n}, \quad \int_\Gamma u_n \mathbf{x} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{B^\circ} \right\} (\mathbf{x} \in \Gamma)$$

Здесь Ω — осесимметричная область, заполненная жидкостью; $\Gamma = \partial\Omega$; $\nu = \nu^\circ (\sigma l / \rho)^{-1/2}$; ν° — кинематическая вязкость жидкости; \mathbf{n} — внешняя нормаль к области Ω ; K_1 и K_2 — главные кривизны поверхности Γ ; Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами на Γ .

Граничные условия на Γ записаны в криволинейной системе координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , выбранной так, что уравнение поверхности Γ имеет вид $\xi^3 = 0$, а соответствующий коэффициент Ляме $H_3 = 1$ на Γ ; тогда $u_{i,h}$ — ковариантная производная ковариантного вектора u_i по переменной ξ^h .

В силу условия соленоидальности имеем

$$(1.3) \quad \int_{\Gamma} u_n d\Gamma = 0$$

Будем считать, что u_n — суммируемая с квадратом на Γ , тогда условие (1.3) означает, что $u_n \in L_2(\Gamma) \ominus \{1\} \equiv H$. Пусть P_H — ортопроектор на H . Поскольку давление $p(x)$ определяется с точностью до произвольной постоянной, условие для нормальных напряжений на Γ в (1.2) можно переписать в виде

$$(1.4) \quad \lambda P_H(-p + 2\nu u_{3,3}) = B u_n$$

где $B = P_H B^0 P_H$ — самосопряженный неограниченный оператор с областью определения $D(B) = W_2^2(\Gamma) \cap H$. (Для поверхности Γ без края вместо граничных условий для оператора B ставится условие ограниченности функций из $D(B)$ в точках пересечения оси вращения с Γ .)

Будем рассматривать задачу (1.2) в предположении, что состояние равновесия жидкости устойчиво по линейному приближению, т. е. оператор B положительно определен в H [2]

$$(1.5) \quad (B u_n, u_n)_{\Gamma} \geq c^2 \|u_n\|_{\Gamma}^2 (c > 0), \quad \|u_n\|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} |u_n|^2 d\Gamma$$

В этом случае оператор B имеет обратный и условие (1.4) переписывается в виде

$$\lambda^{-1} u_n = B^{-1} P_H(-p + 2\nu u_{3,3})$$

Заметим, что условие (1.5) выполняется в случае, когда жидкая капля в состоянии равновесия не вращается ($\varepsilon = 0$), причем рассматриваются ее малые движения, сохраняющие центр тяжести [2]. Поэтому и для достаточно малых ε имеет место (1.5).

2. Идеальная жидкость. Применение функции состояния. Положим в (1.2) $\nu = 0$ и $\lambda = -i\omega$ и будем искать решения в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{u} = -\omega^2 \nabla \Phi + 2i\omega \varepsilon \nabla \Phi \times \mathbf{k} + 4\varepsilon^2 (\mathbf{k} \nabla \Phi) \mathbf{k}, \quad p = -i\omega (4\varepsilon^2 - \omega^2) \Phi$$

где $\Phi = \Phi(r, \varphi, z)$ — функция состояния [$3^{-\varepsilon}$]. Разложим $\Phi(r, \varphi, z)$ в ряд Фурье по φ

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \Phi_m(r, z) \exp(-im\varphi)$$

Для функций $\Phi_m(r, z)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2$) в плоскости rz имеем следующие задачи:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \Phi_m + \left(1 - \frac{4\varepsilon^2}{\omega_m^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = 0 \quad (x \in \Omega_1) \\ & B_m v_n = (4\varepsilon^2 - \omega_m^2) \Phi_m \quad (x \in \Gamma_1), \quad \int_0^{2\pi_0} \Phi_0 r ds = 0, \quad \int_0^{2\pi_0} v_n x r ds = 0 \\ & v_n = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial n} + \frac{2\varepsilon}{\omega_m} \frac{m}{r} \Phi_m \cos(\mathbf{n}, r) - \frac{4\varepsilon^2}{\omega_m^2} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z) \end{aligned}$$

Здесь Γ_1 и Ω_1 — осевые сечения Γ и Ω полуплоскостью $\varphi = \text{const}$, s — дуговая координата вдоль Γ_1 , $0 \leq s \leq 2s_0$, а оператор B_m естественно возникает при разложении функции $(B\zeta)(s, \varphi)$ в ряд Фурье по φ

$$\zeta = \zeta(s, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \zeta_m(s) \exp(-im\varphi), \quad \int_0^{2s_0} \zeta_0(s) r ds = 0$$

$$(B\zeta)(s, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (B_m \zeta_m)(s) \exp(-im\varphi)$$

Частные решения задачи (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) (при $v=0$), отвечающие функции $\Phi_m(r, z)$, имеют вид бегущих волн

$$\bar{\Phi}(r, \varphi, z, t) = \Phi_m(r, z) \exp[i(\omega_m t - m\varphi)]$$

Условимся считать, что частоты $\omega_m > 0$, так как противоположный случай не дает новых вещественных решений. Тогда значениям $m > 0$ отвечают прямые волны во вращающейся жидкости, $m < 0$ — обратные волны, а $m = 0$ — стоячие волны.

3. Асимптотика малых вращений. Будем считать, что капиллярные силы существенно больше центробежных: $\varepsilon^2 = \rho \varepsilon_0^2 l^3 \sigma^{-1} \ll 1$. Так как в этом случае Γ мало отличается от сферы, введем сферические координаты (ρ, φ, θ) с началом в центре капли. Для нахождения функции $\rho = \rho(\theta)$, определяющей поверхность Γ , имеем следующую задачу [2]:

$$[rz'(1+z'^2)^{-1/2}]' - 1/2 \varepsilon^2 r^3 - cr = 0, \quad ()' = \frac{d}{dr}$$

$$z = \rho \cos \theta, r = \rho \sin \theta; \rho_0' = 0 \quad (\theta = 0, \pi), \rho(0) = \rho(\pi)$$

Применение метода малого параметра приводит к решению

$$(3.1) \quad \rho = R \left[1 + \frac{1}{24} (1 - 3 \cos^2 \theta) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right], \quad R = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2}$$

Решение задачи (2.2) в координатах (ρ, θ) будем искать в виде

$$\Phi_m = \Phi_m^0 + \varepsilon \Phi_m^1 + O(\varepsilon^2), \quad \omega_m = \omega_m^0 + \varepsilon \omega_m^1 + O(\varepsilon^2).$$

Из (3.1) видно, что задачу (2.2) с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ можно решать в полукруге ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$). Нулевое приближение дает известный результат [1]

$$(3.2) \quad \Phi_{lm}^0 = \rho^l P_l^m(\cos \theta), \quad \omega_{lm}^0 = [l(l-1)(l+2)]^{1/2} R^{-3/2}$$

$$l = 2, 3, \dots; |m| = 0, 1, 2, \dots, l$$

(При $l=1$ получаем движение шара как целого вдоль трех декартовых осей, для таких движений не удовлетворяется последнее условие в (1.2) — условие сохранения центра масс.) Для каждого $l \geq 2$ получаем $2l+1$ собственные функции Φ_{lm}^0 , т. е. имеется $(2l+1)$ -кратное вырождение собственных значений ω_{lm}^0 .

В первом приближении получаем

$$(3.3) \quad \Delta[\Phi_m^1 \exp(-im\varphi)] = 0 \quad (x \in \Omega)$$

$$B_m \frac{\partial \Phi_m^1}{\partial \rho} - [\omega_{lm}^0]^2 \Phi_m^1 = \frac{2}{\omega_{lm}^0} m \frac{1}{R} B_m \Phi_m^0 + 2\omega_{lm}^0 \omega_m^1 \Phi_m^0 \quad (\rho = R)$$

Так как Φ_m^0 и Φ_m^1 удовлетворяют уравнению (3.3), то из формулы Грина для гармонических функций получаем необходимое условие разрешимости задачи (3.3)

$$(3.4) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi_m^0}{\partial \rho} \Phi_m^1 - \frac{\partial \Phi_m^1}{\partial \rho} \Phi_m^0 \right) d\theta = 0$$

Учитывая граничные условия для Φ_m^0 и Φ_m^1 и самосопряженность B_m , из (3.4) имеем

$$(m + l\omega_m^1) \int_0^\pi (\Phi_m^0)^2 d\theta = 0$$

Отсюда $\omega_{lm}^1 = -m/l$, и потому

$$(3.5) \quad \omega_{lm} = \omega_{lm}^0 - (m/l)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Эта формула показывает, что уже в первом приближении по ε происходит расщепление частот во вращающейся жидкости.

4. Вариационный подход. Вернемся к рассмотрению задачи (2.2) и будем считать ε произвольным. Как показывают примеры [2, 5, 6] при $(1 - 4\varepsilon^2/\omega_m^2) > 0$ (эллиптический случай уравнения (2.2)) во вращающейся идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд, существуют поверхностные волны, обусловленные действием капиллярных и объемных потенциальных сил. Спектр частот этих волн дискретен с единственной предельной точкой на бесконечности. При $(1 - 4\varepsilon^2/\omega_m^2) < 0$ в жидкости имеются внутренние волны, обусловленные действием кориолисовых сил. Частоты внутренних волн образуют множество, плотное на отрезке $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Недавно в [7] доказано, что эти общие факты имеют место для колебаний как одной жидкости в произвольном сосуде, так и системы из несмешивающихся жидкостей.

Для приближенного вычисления спектра поверхностных волн заметим, что задача (2.2) равносильна вариационной задаче о нахождении стационарных значений квадратичного функционала

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_\varepsilon[\Phi_m] &= D_m(\Phi_m, \Phi_m) - \frac{4\varepsilon^2}{\omega_m^2} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 r dr dz - \\ &- \frac{2\varepsilon}{\omega_m} m \int_0^{2s_0} \Phi_m^2 \cos(n, r) ds \\ &- (\omega_m^2 - 4\varepsilon^2) \int_0^{2s_0} (B_m^{-1} \Phi_m) \Phi_m r ds, \quad D_m(\Phi_m, \Phi_m) \equiv \\ &\equiv \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right)^2 + \frac{m}{r^2} \Phi_m^2 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \end{aligned}$$

Его следует варьировать в классе функций с ограниченным интегралом Дирихле $D_m(\Phi_m, \Phi_m) < \infty$. При $m=0, \pm 1$ должны выполняться также условия

$$F_0 \equiv \int_0^{2s_0} \Phi_0 z r ds = 0, \quad F_m = \int_0^{2s_0} \Phi_m r^2 ds = 0 \quad (m=1, -1)$$

обеспечивающие сохранение центра масс. Поскольку после применения оператора B_m^{-1} к обеим частям граничного условия задачи (2.2) оно становится естественным (в смысле вариационного исчисления), то функции из области определения функционала (4.1) могут ему не удовлетворять. Это обстоятельство весьма существенно при применении метода Ритца к $F_\varepsilon[\Phi_m]$.

5. Реализация метода Ритца. Как показано в п. 3, задача (2.2) при $\varepsilon=0$ решается методом разделения переменных. Собственные функции в этом случае имеют вид полиномов по r и z в плоскости rz . Поэтому в качестве системы координатных функций для метода Ритца при произвольном значении ε можно выбрать следующую систему полиномов:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f_{mp}(r, z) &= r^{|m|} g_p(r, z), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p=1, 2, \dots \\ g_1 &= 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = z, \quad g_4 = r^2, \quad g_5 = rz, \quad g_6 = z^2, \dots \end{aligned}$$

Функции (5.1) ортонормируем в энергетическом пространстве «главного» оператора задачи (4.1); тогда получим новую систему координатных функций $\{e_{mp}\}$, которая будет удовлетворять условиям $[e_{mj}, e_{mk}] = D_m(e_{mj}, e_{mk}) = \delta_{jk}$. Можно ожидать по аналогии с рассуждениями в [8], что это обеспечит устойчивую сходимость метода Ритца для такой системы функций.

Так как функции $e_{0p}(r, z)$, $e_{1p}(r, z)$ и $e_{-1p}(r, z)$ и их линейные комбинации не удовлетворяют условиям (4.2), то при данных значениях m вместо функционала (4.1) будем рассматривать новый функционал

$$(5.2) \quad \Psi_\varepsilon[\Phi_m] = F_\varepsilon[\Phi_m] - \mu_m F_m, \quad m=0, \pm 1$$

где μ_m — неопределенные множители Лагранжа.

Приближенное решение вариационной задачи (4.1) или (5.2) будем искать в виде

$$(5.3) \quad \Phi_m(r, z) = \sum_{p=1}^M a_p [e_{mp}(r, z) - d_{mp}]$$

где M — число координатных функций, a_p — неизвестные постоянные (коэффициенты Ритца), числа d_{mp} отличны от нуля только при $m=0$ и определяются из условия $(e_{0p})_r - d_{0p} \in L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, что приводит к равенствам

$$d_{0p} = \int_0^{2\pi} e_{0p} r ds \left\{ \int_0^{2\pi} r ds \right\}^{-1}, \quad p=1, 2, \dots, M$$

Система уравнений Ритца для функций (5.3) и функционала (5.2) имеет вид

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^M \left[\delta_{ik} - \frac{4\varepsilon^2}{\omega_m^2} \gamma_{ik} - \frac{2\varepsilon}{\omega_m} \alpha_{ik} - (\omega_m^2 - 4\varepsilon^2) t_{ik} \right] a_k - \mu_m b_m &= 0 \\ \sum_{k=1}^M b_{mk} a_k &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

$$\gamma_{ik} = \int_{\Omega_1} \frac{\partial e_{mi}}{\partial z} \frac{\partial e_{mk}}{\partial z} r dr dz, \quad \alpha_{ik} = \int_0^{2s_0} e_{mi} e_{mk} \cos(nr) ds$$

$$t_{ik} = \int_0^{2s_0} (B_m^{-1} e_{mi}) e_{mk} r ds, \quad b_{0i} = \frac{1}{2} \int_0^{2s_0} e_{0i} z r ds$$

$$b_{-i} = b_{i1} = \frac{1}{2} \int_0^{2s_0} e_{i1} r^2 ds, \quad \mu_m = b_{mi} = 0 \text{ при } |m| \geq 2$$

Из условия равенства нулю определителя данной системы находим приближенно собственные частоты ω_{mp} задачи (3.1). Подставляя значения $\omega_{m1}, \omega_{m2}, \dots$ в (5.4), получим коэффициенты a_k , через которые по формуле (5.3) находим функции состояния $\Phi_m(r, z)$.

6. Вычисление коэффициентов в системе (5.4). Уравнение поверхности Γ , записанное в параметрической форме $r=r(s), z=z(s)$, является решением задачи Коши [2]

$$r'' = -z' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right), \quad z'' = r' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right) \quad (6.1)$$

$$r(0) = z'(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z(0) = z_0$$

где c и $p = \varepsilon^2/2$ — параметры семейства.

Выберем p и c так, чтобы в экваториальной точке $s=s_0$ было $r'(s_0) = 0$ ($z'(s_0) = -1$). Осуществим преобразование подобия в (6.1) по формулам

$$r_* = rp^{1/2}, \quad z_* = (z - z_0)p^{1/2}, \quad s_* = sp^{1/2}, \quad c_* = cp^{-1/2} \quad (6.2)$$

Тогда в новых переменных задача (6.1) сохранит свой вид, однако на месте параметра p будет стоять единица и $z_*(0) = 0$. Полученная система уравнений содержит лишь один параметр c_* . Будем интегрировать эту систему при каком-либо $c_* < 0$ до тех пор, пока при некотором $s_* = (s_*)_0$, отвечающем экваториальной точке в новых переменных, не выполнится условие $r_*'[(s_*)_0] = 0$. Так как объем капли V^* в новых переменных связан с безразмерным объемом v соотношением $V^* = pv$, а $v = 1$ (см. п. 1), то $p = V^*$ и по формулам (6.2) находим c, z_0 и координату s_0 экваториальной точки в переменных (r, z) . Зная эти параметры, можно теперь решить задачу (6.1) и вычислить все интегралы в (5.4), кроме t_{ik} . При вычислении t_{ik} обратим внимание на то, что оператор B_m^{-1} — одномерный интегральный оператор, обратный к B_m (см. (2.2))

$$(B_m^{-1}u)(s) = \int_0^{2s_0} G_m(s, t) u(t) r(t) dt, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Его ядро $G_m(s, t)$ является функцией Грина следующей задачи:

$$B_m u = -D_m u \equiv -[K_1^2 + K_2^2 - \varepsilon^2 r z'] u(s) - \frac{r'}{r} u' + \frac{m^2}{r^2} u = f(s)$$

$$|u(0)| < \infty, \quad |u(2s_0)| < \infty \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0 \leq s \leq 2s_0)$$

$$B_0 u = -D_0 u + \int_0^{2s_0} (D_0 u)(s) r(s) ds \bigg/ \int_0^{2s_0} r(s) ds = f(s) \quad (0 \leq s \leq 2s_0)$$

$$\int_0^{2s_0} u(s) r(s) ds = 0, \quad \int_0^{2s_0} u(s) u_1(s) r(s) ds = 0, \quad \int_0^{2s_0} f(s) r(s) ds = 0$$

$$|u(0)| < \infty, \quad |u(2s_0)| < \infty \quad (m = 0)$$

Здесь $u_1(s) = r'(s)$ — решение однородной задачи $B_0 u = 0$. При $m=0$ оператор B_0 , а вместе с ним и B_0^{-1} действует в подпространстве $L_{2r}[0, 2s_0] \ominus \{1\} \ominus \{u_1\}$.

Функцию Грина $G_m(s, t)$ можно выразить через линейно-независимые решения $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$ уравнения $B_m u = 0$

$$G_m(s, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} |m|^{-1} u_{m1}(t) u_{m2}(s) & t \leq s \leq 2s_0 \\ -\frac{1}{2} |m|^{-1} u_{m1}(s) u_{m2}(t) & s \leq t \leq 2s_0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$G_0(s, t) = \begin{cases} u_{01}(s) u_{02}(t) - \delta_1 F(s) F(t) + w(s, t), & t \leq s \leq 2s_0 \\ u_{02}(s) u_{01}(t) - \delta_1 F(s) F(t) + w(s, t), & s \leq t \leq 2s_0 \end{cases}$$

$$w(s, t) = w(t, s) = \delta_2 [u_{01}(s) F(t) + F(s) u_{01}(t)] - \delta_3 u_{01}(s) u_{01}(t) [F(t) + F(s)]$$

$$\frac{1}{\delta_1} = \int_0^{2s_0} F(s) r(s) ds, \quad \frac{1}{\delta_3} = \int_0^{2s_0} u_{01}^2(s) r(s) ds, \quad \delta_2 = \delta_1 \delta_3 \int_0^{2s_0} F(s) u_{01}(s) r(s) ds$$

$$F(s) = u_{01}(s) \int_0^s u_{02}(t) r(t) dt + u_{02}(s) \int_s^{2s_0} u_{01}(t) r(t) dt$$

Уравнения для $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$ имеют особенности в точках $s=0$ и $s=2s_0$. Чтобы избежать при интегрировании на ЭВМ особенности при $s=0$, выберем в качестве начальной точки малое значение $s=\Delta s \neq 0$. Начальные данные в точке $s=\Delta s$ для функций $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$ можно получить из разложения последних при малых значениях s

$$u_{01}(s) = 1 + o(1), \quad u_{02}(s) = -\ln s [1 + o(1)]$$

$$u_{m1}(s) = s^m [1 + o(1)], \quad u_{m2}(s) = \bar{s}^m [1 + o(1)], \quad m = 1, 2, \dots; \quad s \rightarrow 0$$

Чтобы избежать особенности в конечной точке $s=2s_0$, заметим, что как равновесная поверхность Γ , так и вся задача (2.2) симметричны относительно плоскости $z=0$. Поэтому интегрирование по координате s в пределах $0 \leq s \leq 2s_0$ можно свести к интегрированию в пределах $0 \leq s \leq s_0$.

7. Асимптотика малой вязкости. Вернемся к рассмотрению задачи (1.2), причем будем считать, что вязкие силы малы по сравнению с капиллярными, т. е. $\nu = \nu^\circ (\sigma l / \rho)^{-1/2} \ll 1$. Тогда в первом уравнении в (1.2) при старшей производной стоит малый параметр и для решения этой задачи применим метод пограничного слоя [9, 10]. Искомые функции будем искать в виде $u = v + w$, $p = q + s$, где функции $v(x; \nu)$ и $q(x; \nu)$ при $\nu \rightarrow 0$ переходят в решения задачи о колебаниях идеальной жидкости, а функции $w(x; \nu)$ и $s(x; \nu)$ типа пограничного слоя компенсируют невязку в граничных условиях.

Подставив выражение для u и p в первое уравнение (1.2), получим соотношение

$$(-\lambda \nu + 2\epsilon k \times v + \nabla q - \nu \Delta v) + (-\lambda w + 2\epsilon k \times w + \nabla s - \nu \Delta w) = 0$$

Исходя из характера функций w и s , потребуем, чтобы оба выражения в скобках обратились в нуль. Аналогично из второго уравнения (1.2) получим $\nabla v = 0$ и $\nabla w = 0$ ($x \in \Omega$).

Положим $v = v^\circ + \nu v^1 + \dots$, $q = q^\circ + \nu q^1 + \dots$, $\lambda = \lambda^\circ + \nu \lambda^1 + \dots$ и будем считать, что v° , q° и λ° дают решение задачи о колебаниях идеальной жидкой капли (п. 2). Для погранслоного решения w , s в области D_Γ , примыкающей к поверхности Γ на расстоянии $O(\nu)$ вдоль ξ^3 , получим следующую задачу с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$-\lambda^\circ w + \nabla s - \nu \Delta w + 2\epsilon k \times w = 0, \quad \nabla w = 0 \quad (x \in \Omega)$$

$$(7.1) \quad w_{1,s} + w_{3,1} = -(v_{1,s}^\circ + v_{3,1}^\circ), \quad w_{2,3} + w_{3,2} = -(v_{2,3}^\circ + v_{3,2}^\circ) \quad (x \in \Gamma)$$

$$w \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi^3 v^{-1/2} \rightarrow \infty$$

Асимптотическое решение задачи (7.2) при $v \rightarrow 0$ запишем в криволинейной системе координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , введенной в области D_Γ , где $\xi^3 > 0$. Пусть w_1, w_2, w_3 — ковариантные координаты вектора w в этой системе координат. Тогда из (7.1) можно получить

$$(7.2) \quad w_1 = -\frac{v^{1/2}}{2} \left[(\varphi_0 + i\varphi_1) \frac{1}{a_1} E_1 + (\varphi_0 - i\varphi_1) \frac{1}{a_2} E_2 \right]$$

$$w_2 = -\frac{v^{1/2}}{2} \left[(\varphi_1 - i\varphi_0) \frac{1}{a_1} E_1 + (\varphi_1 + i\varphi_0) \frac{1}{a_2} E_2 \right]$$

$$w_3 = \frac{v}{2H_1^\circ H_2^\circ} \left\{ \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left((\varphi_0 + i\varphi_1) H_2^\circ \frac{1}{a_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left((\varphi_1 - i\varphi_0) H_1^\circ \frac{1}{a_2} \right) \right] E_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left((\varphi_0 - i\varphi_1) H_2^\circ \frac{1}{a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left((\varphi_1 + i\varphi_0) H_1^\circ \frac{1}{a_2} \right) \right] E_2 \right\}$$

$$s=0, \quad E_i = \exp(a_i \xi^3 v^{-1/2}) \quad (i=1, 2)$$

$$a_1 = (-\lambda^\circ + i2\varepsilon(\mathbf{kn}))^{1/2}, \quad a_2 = (-\lambda^\circ - i2\varepsilon(\mathbf{kn}))^{1/2}, \quad \text{Re } a_i < 0,$$

$$\text{Re } a_2 < 0$$

$$\varphi_0 = \varphi_0(\xi^1, \xi^2, 0) = (v_{1,s}^\circ + v_{3,1}^\circ), \quad \varphi_1 = \varphi_1(\xi^1, \xi^2, 0) = (v_{2,3}^\circ + v_{3,2}^\circ), \quad H_1^\circ, H_2^\circ -$$

значения соответствующих коэффициентов Ляме при $\xi^3 = 0$, т. е. на Γ .

Как видно из (7.2), на свободной поверхности Γ имеем $w_1, w_2 = O(v^{1/2})$, а $w_3 = O(v)$.

Зная пограничное решение w, s , выпишем задачу для v^1, q^1 и λ^1

$$-\lambda^\circ v^1 + \nabla q^1 + 2\varepsilon \mathbf{k} \times \mathbf{v}^1 = \lambda^1 v^\circ + \Delta v^\circ, \quad \nabla v^1 = 0 \quad (x \in \Omega)$$

$$-\lambda^\circ B^{-1} q^1 - v_n^1 = \lambda^1 B^{-1} q^\circ - 2\lambda^\circ B^{-1} v_{3,3}^\circ + w_3/v \quad (x \in \Gamma)$$

Из условия разрешимости этой задачи получим

$$(7.3) \quad \lambda^1 = \left\{ \int_\Gamma \left[2\lambda^\circ B^{-1} v_{3,3}^\circ - w_3 \frac{1}{v} \right] q^{\circ*} d\Gamma - \int_\Omega (\Delta v^\circ) v^{\circ*} d\Omega \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega |v^\circ|^2 d\Omega + \int_\Gamma (B^{-1} q^\circ) q^{\circ*} d\Gamma \right\}^{-1}$$

Перепишем правую часть в (7.3), воспользовавшись соотношениями

$$(7.4) \quad -\int_\Gamma \frac{w_3}{v} q^{\circ*} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\mathbf{wn}}{v} q^{\circ*} d\Gamma = \int_\Omega \nabla \left(\frac{\mathbf{w}}{v} q^{\circ*} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{v} \int_\Gamma \int_0^\infty [w_1 (\nabla q^{\circ*})^1 + w_2 (\nabla q^{\circ*})^2] d\alpha d\Gamma \{1 + o(1)\} \quad \left(\alpha = \frac{\xi^3}{v^{1/2}} \right)$$

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{v}^{\circ} \mathbf{v}^{\circ} d\Omega = E(\mathbf{v}^{\circ}, \mathbf{v}^{\circ}) - \int_{\Gamma} [\varphi_0 (v^{\circ})^4 + \varphi_1 (v^{\circ})^2 + 2v_{3,3}^{\circ} (v^{\circ})^3] d\Gamma$$

где $E(u, u)$ в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) имеет вид [2]

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 d\Omega$$

Проинтегрировав (7.4) по α и подставив результат в (7.3), получим

$$\text{Re } \lambda^l = A \left[E(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 4\varepsilon^2 \int_{\Gamma} v^3 (v_{1,3} + v_{3,1}) \frac{k_3 k_1}{4\varepsilon^2 k_3^2 - \omega^2} d\Gamma \right] \quad (7.5)$$

$$\text{Im } \lambda^l = -2A\varepsilon\omega \int_{\Gamma} v^3 (v_{2,3} + v_{3,2}) \frac{k_1}{4\varepsilon^2 k_3^2 - \omega^2} d\Gamma$$

$$\frac{1}{A} = \int_{\Omega} (\mathbf{v})^2 d\Omega + \int_{\Gamma} (B^{-1}q) q d\Gamma, \quad \mathbf{v} = \text{Re } \mathbf{v}^{\circ}, \quad q = \text{Re } q^{\circ}, \quad \omega = i\lambda^{\circ}$$

$k_3 = k_3(\xi^1, \xi^2, 0) = (\mathbf{k}\mathbf{n})$, $k_1 = k_1(\xi^1, \xi^2, 0)$ — проекция \mathbf{k} на направление касательной к линии $\xi^1 = \text{const}$.

Таким образом, решив задачу о малых колебаниях идеальной вращающейся капли, по формулам (7.5) можно получить поправку на малую вязкость к частоте колебаний и декремент затухания $\text{Re } \lambda^l$.

Из формул (7.5) можно получить известные частные случаи.

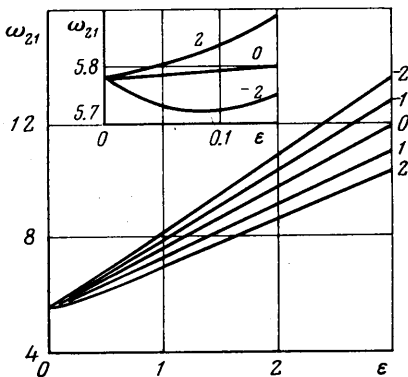
Для колебаний невращающегося жидкого шара имеем ($\varepsilon=0$, см. [2, 11, 12])

$$\lambda_l^1 = (2l+1)(l-1), \quad l=2, 3, \dots$$

Для плоских колебаний вращающегося жидкого круга [2]

$$\lambda_m^{\circ} = -i\omega_m, \quad \lambda_m^1 = 2|m|(|m|-1) \frac{\omega_m}{\omega_m + \varepsilon}, \quad m = \pm 2, \pm 3, \dots$$

8. Результаты вычислений. На ЭВМ М-220 были вычислены частоты колебаний поверхностных волн задачи (2.2) при $m=0, \pm 1, \pm 2$ при различных значениях параметра $\varepsilon \in [0, 3]$. Число координатных функций варьировалось от 4 до 6. При вычислении коэффициентов Ритца интегралы в (5.4) заменялись приближенно квадратурными суммами. Одномерные интегралы (коэффициенты γ_{ik} можно свести к одномерным интегралам) вычислялись по формуле Симпсона с 20 точками на $[0, s_0]$. Двукратные интегралы вычислялись следующим образом: внутренний интеграл вычислялся одновременно с интегрированием системы (6.1) и его значения запоминались в точках Симпсона, а внешний — по формуле Симпсона.



На фигуре представлены зависимости первых частот колебаний от угловой скорости вращения ε , где цифрами обозначены значения m . Видно, что при увеличении ε для $\varepsilon \geq 0.15$ функции $\omega_{m1}(\varepsilon)$ возрастают, причем при $\varepsilon > 0$ происходит расщепление частот для фиксированного $|m|$. При этом частоты прямых волн ($m > 0$) меньше соответствующих частот обратных волн ($m < 0$).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ частоты ω_{m1} стремятся согласно (3.5), (3.2) к частотам колебаний не-вращающейся жидкости. Значения ω_{21} при $M=5.6$ приведены ниже.

ε	$\text{Im} \lambda^1$	$\text{Re} \lambda^1$	$\omega_{21}(M=5)$	$\omega_{21}(M=6)$
0.478	0.12	4.38	6.184	6.183
1.325	0.28	3.86	7.202	7.201
1.983	0.41	3.51	8.575	8.570
2.513	0.56	3.25	9.451	9.443

Хорошо видно, что для получения четырех достоверных знаков достаточно пяти координатных функций. Расчеты на ЭВМ показали также, что при $\varepsilon \leq 0.15$ отличие вычисленных на ЭВМ значений $\omega_{m1}(\varepsilon)$ от рассчитанных по асимптотической формуле (3.5) не превышает 5%. Здесь также приведены значения декрементов затуханий и поправок к частотам, вычисленные по формуле (7.5) для $m=2$.

В заключение автор благодарит Н. Д. Копачевского за руководство и помощь в работе.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1953.
2. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
3. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1954, т. 18, № 1.
4. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
5. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2.
6. Копачевский Н. Д., Радякин Н. К. Свободные колебания двух капиллярных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
7. Копачевский Н. Д. О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде. Функциональный анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 2.
8. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
10. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
11. Chandrasekhar S. The oscillation of viscous liquid globe. Proc. London Math. Soc., 1959, vol. 9, No. 33.
12. Reid W. H. The oscillations of a viscous liquid globe with a core. Proc. London Math. Soc., 1959, vol. 9, No. 35.