

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПОДВОДЕ МАССЫ И ЭНЕРГИИ В ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ

Н. С. ЗАХАРОВ, В. П. КОРОБЕЙНИКОВ

(Москва)

Проведен анализ одномерных нестационарных автомодельных движений газа с экзотермическими реакциями за ударными волнами. Толщиной зоны химических реакций пренебрегается. Получены новые решения задач о течениях химически активного газа с образованием ударных и детонационных волн. В частности, показано, что в рамках принятых схем процесса горения может быть построено решение с пятью поверхностями сильного разрыва. Приведены результаты численных решений для пересжатой детонации и детонации Чепмена – Жуге.

1. Для различного рода физико-химических исследований в ударных трубах, в теории нестационарных течений в соплах и при рассмотрении газодинамических процессов в камерах сгорания и для теории распространения фронтов ионизации и поглощения может представлять интерес следующая задача.

Пусть к газу в сосуде A (фиг. 1) тем или иным способом подводится тепловая энергия так, что параметры газа (давление и плотность) меняются со временем. Пусть, далее, задана пространственная область B (труба), заполненная горючей смесью, и в моменты времени $t \leq t_0$ известно распределение скорости, плотности и давления в области B . В момент времени $t = t_0$ начинается истечение инертного газа из сосуда A в область B через малое отверстие O . В результате возникает нестационарное движение обоих газов, причем в горючей смеси могут возникать волны детонации и фронты пламени.

Будем далее рассматривать движение в области B , предполагая его одномерным. В случае инертных газов такая задача впервые была рассмотрена в [1].

Для определенности положим, что газ — совершенный, невязкий и не теплопроводный. Возмущенное движение газов в области B при этих предположениях полностью определяется следующей системой параметров:

$$(1.1) \quad r, t, M(t), N(t), p_1, \rho_1, v_1, Q, u, \gamma_i$$

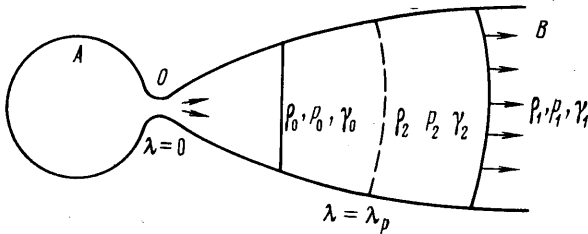
где r — геометрическая координата, $M(t)$, $N(t)$ — поток массы и энергии в область B , p_1, ρ_1, v_1 — давление, плотность и скорость горючей смеси, Q — теплота, выделяющаяся при сгорании единицы массы газа, u — скорость фронта пламени, $\gamma_i = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ — коэффициенты Пуассона инертного газа, горючей смеси и продуктов реакции, и принято, что $t_0 = 0$. Функции $M(t)$ и $N(t)$ можно считать заданными и определяемыми процессами, происходящими в сосуде A . Аппроксимируем $M(t)$ и $N(t)$ степенными функциями [1]

$$M(t) = mt^{\alpha_1}, N(t) = nt^{\alpha_2}, m, n = \text{const}$$

В области непрерывности движения газа задача сводится к построению решения системы уравнений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v F) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= 0 \\ H &= \frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} \frac{p}{\rho} + c_m Q \end{aligned}$$

где $F(r)$ — площадь поперечного сечения трубы, причем далее принимается, что $F = \text{const} \cdot r^{-1}$, $v = 1, 2, 3$ — для плоского, цилиндрического и сферического случаев, c_m — массовая доля непрореагирующих молекул.



Фиг. 1

Используя методы работы [2], рассмотрим класс автомодельных решений системы (1.2). Будем считать величины Q , u , p_1 , v_1 константами, а плотность горючей смеси $\rho_1 = Ar^{-\omega}$, $\omega < 3$, $A = \text{const}$. Условия автомодельности запишутся следующим образом ($p_1 = 0$):

$$(1.3) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad (2 + v - \omega)\alpha_1 - (v - \omega)\alpha_2 = 2(v - 1 - \omega).$$

Принимая во внимание эти условия, можно показать, что при учете противодействия p_1 задача будет автомодельна, если $\omega = 0$. Для значений $\omega \neq 0$ возмущенное движение газов можно рассматривать как автомодельное при условии, что давлением p_1 можно пренебречь. Можно считать, что распределения давления, плотности и скорости горючей смеси имеют вид степенных функций от координат и рассматривать для общности зависимость полного тепловыделения и скорости фронта пламени от времени и параметров течения в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 p^{k_1} \rho^{k_2} t^{k_3}, \quad u = u_0 p^{m_1} \rho^{m_2} t^{m_3}, \quad Q_0, u_0 = \text{const} \\ p_1 &= p_0 r^{l_1} t^{l_2}, \quad \rho_1 = \rho_0 r^{\omega_1} t^{\omega_2}, \quad v_1 = v_0 r^{n_1} t^{n_2}, \quad p_0, \rho_0, v_0 = \text{const} \end{aligned}$$

При сделанных предположениях также имеют место решения, описывающие автомодельные течения. Условия автомодельности из-за их громоздкости приводить не будем.

2. В горючей смеси могут возникать фронты пламени и детонации. Толщина зоны химических реакций за детонационной волной и за фронтом пламени бывает много меньше характерного размера задачи. Поэтому, если не интересоваться процессами, происходящими в самой зоне химических реакций, можно пренебречь толщиной последней и считать, что газ сгорает мгновенно на некоторой геометрической поверхности [3]. В урав-

нениях (1.2) можно положить $c_m=0$, так как кинетика химических реакций не учитывается.

Вследствие автомодельности сформулированной задачи для искомых функций p, ρ, v можно написать формулы [2]

$$(2.1) \quad v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = Ar^{-\alpha} R(\lambda)$$

$$p = Ar^{2-\alpha} t^{-2} P(\lambda), \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{m}{n} r t^{-\delta}}$$

$$\delta = \frac{2 + \alpha_2 - \alpha_1}{2}, \quad \lambda_0 = \text{const}$$

Подставляя теперь в уравнения (1.2) вместо функций p, ρ, v их выражения (2.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции P, R, V . Как показано в [2], фактическое решение задачи заключается в исследовании (в областях непрерывности течения) поля интегральных кривых уравнения

$$(2.2) \quad \frac{dz}{dV} = F(z, V, \gamma_i, \nu, \delta, \omega), \quad z = \gamma_i P/R$$

и анализа возможных разрывов. Правая часть уравнения (2.2) есть известная функция своих аргументов [2]. В исследуемых решениях вдоль интегральных кривых параметр λ должен изменяться от 0 до ∞ . Поверхность раздела между вытекающим газом и горючей смесью — контактная поверхность — будет двигаться по закону $\lambda = \lambda_p = \text{const}$. Это означает, что определение движения горючей смеси соответствует решению задачи об одномерном автомодельном движении поршня в последней, движущимся по закону $r_p = \lambda_p t^{\delta}$. Таким образом, решение задачи сводится к построению решения уравнения (2.2) в области $0 \leq \lambda \leq \lambda_p$, соответствующей вытекшему из отверстия газу и решения задачи о поршне в детонирующей среде для области $\lambda_p \leq \lambda \leq 1$; постоянная λ_0 позволяет принять на первой волне $\lambda = 1$.

3. Положим $\omega = 0$. Картина поля интегральных кривых уравнения (2.2) при $\nu = 3$ представлена на фиг. 2. Стрелки указывают направление роста λ , здесь же приведены параболы $z^i(V)$ ($i=1, 2, \dots, 7$).

Предположим, что по горючей смеси будет распространяться волна детонации. Условия на скачке при наличии притока тепла могут быть записаны в следующем виде:

$$(3.1) \quad R_2 = R_1 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} (1 - \beta) \left(1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (1 - V_1)^2} \right) \right]^{-1}$$

$$V_2 = 1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} (1 - \beta) \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (1 - V_1)^2} \right] (V_1 - 1)$$

$$z_2 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \right)^2 (1 - V_1)^2 (1 - \beta) (1 + \gamma_2 \beta) \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (1 - V_1)^2} \right]$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_2^2} \left\{ 1 + \frac{2}{(1 - V_1)^2} \left[\frac{z_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{Q}{D^2} \right] \right\} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (1 - V_1)^2} \right]^{-1}$$

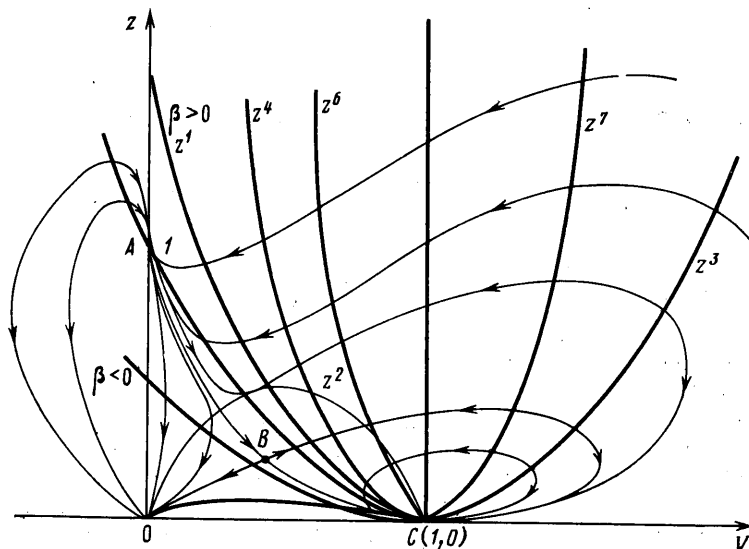
где D — скорость скачка.

Отсюда видно [2], что волне детонации в плоскости V, z соответствует парабола

$$(3.2) \quad z^1 = \frac{1 + \gamma_2 \beta}{1 - \beta} (1 - V)^2$$

Значения V_2, z_2 расположены также на параболе

$$z^2 = \frac{\gamma_2(1 - V_1)(1 + \gamma_2 \beta) [\gamma_1 + z_1 / (1 - V_1)^2] V(1 - V)}{\gamma_1(\gamma_2 + 1) - \gamma_2(1 - V_1)(1 - \beta) [\gamma_1 + z_1 / (1 - V_1)^2]}$$



Фиг. 2

Фронт детонации является скачком уплотнения, для которого справедливо неравенство $z_1 < (1 - V_1)^2$. Условие Чепмена - Жуке (Ч - Ж) дает $z = (1 - V)^2$, что равносильно равенству $\beta = 0$.

Если $\beta > 0$, парабола (3.2) расположена выше звуковой параболы $z^3 = (1 - V)^2$ и решение за детонационной волной можно непрерывно продолжить до прямой $V = 1$, точки которой соответствуют контактной поверхности (поршню). В физическом пространстве (фиг. 1) при этом между контактной поверхностью и фронтом детонации находится непрерывная, изэнтропически сжатая область течения. При $\beta = 0$ удовлетворяется условие Ч - Ж, и решение за детонационной волной также можно продолжить до прямой $V = 1$ непрерывным образом. Скорость поршня в этом случае получается «критической». Если скорость поршня меньше этой «критической» скорости, то возможен второй, простой скачок уплотнения [4]. При этом непосредственно за фронтом детонации следует волна разрежения. В плоскости Vz движение происходит вдоль интегральной кривой в направлении убывания λ до пересечения этой интегральной кривой с параболой $z = a(1 - V)^2$, $a < 1$. Затем скачком переходим на параболу $z = b(1 - V)^2$, где

$$b = 1 + \frac{(1 - a)(\gamma_2 + 1)}{2a + \gamma_2 - 1}$$

Далее решение за вторым скачком можно продолжить до прямой $V=1$ непрерывным образом.

Если $\beta < 0$, то парабола z^4 расположена ниже звуковой параболы. На последней параметр λ имеет экстремум, продолжить непрерывно решение за детонационной волной до прямой $V=1$ нельзя [2]. Однако, как и в случае $\beta=0$, здесь возможно решение с дополнительным скачком уплотнения.

Рассмотрим теперь случай, когда по горючей смеси будет распространяться фронт пламени. Он является скачком разрежения, для которого верно неравенство $z_1 > (1-V_1)^2$. Из условий (3.1) видно, что ударные волны переводят точки, лежащие под звуковой параболой, в точки, лежащие над ней [2]. Следовательно, переход от начального состояния к возмущенному движению при начальном $z_1 < (1-V_1)^2$ возможен только через простой скачок уплотнения.

Из условий на простом скачке уплотнения находим, что точки (V_1, z_1) переходят в точки парабол

$$z^4 = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1-1} (1-V)^2 \left[1 - \frac{\gamma_1-1}{2\gamma_1} \frac{z_1}{(1-V_1)^2} \right] \left[1 + \frac{2}{\gamma_1-1} \frac{z_1}{(1-V_1)^2} \right]^{-1}$$

$$z^5 = (1-V) \left[1 + \frac{\gamma_1-1}{2} V - \frac{\gamma_1+1}{2} V_1 \right]$$

Дальнейшее движение газа соответствует переходу в плоскости Vz по интегральной кривой, проходящей через точку пересечения парабол z^4 и z^5 . Фронт пламени можно построить с помощью скачка на параболу $z = \kappa(1-V)^2$ из точки пересечения интегральной кривой для движения газа за ударной волной с параболой

$$z^6 = (1-V)^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} [E + \sqrt{E^2 + G}]$$

$$E = \frac{2\kappa\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1) + (\kappa^2\gamma_1 + \gamma_2^2)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 + 2\kappa - 1)}$$

$$G = \frac{\kappa^2(\gamma_2 - 1) - 2\kappa\gamma_2 + (\kappa + \gamma_2)^2(\gamma_2 - 1)2Q/u^2}{\gamma_2 + 2\kappa - 1}$$

Значение $\kappa > 1$ соответствует дозвуковому горению, а $\kappa < 1$ — сверхзвуковому горению. При $\kappa=1$ осуществляется режим Ч — Ж для горения. Решение за фронтом пламени при $\kappa \geq 1$ можно непрерывно продолжить по соответствующей интегральной кривой до прямой $V=1$. При $\kappa=1$ за фронтом пламени может идти волна разрежения. В этом случае надо ввести дополнительный скачок уплотнения, как это делалось для детонации Ч — Ж.

В физическом пространстве картина получается следующей: по горючей смеси движется ударная волна, за которой распространяется фронт горения. За фронтом пламени следует волна разрежения, которая замыкается вторым скачком уплотнения; далее, до контактной поверхности, — область изэнтропического сжатия. При $\kappa < 1$ возможно решение только с дополнительным скачком уплотнения.

Для монотонности изменения параметра λ во всех рассмотренных выше случаях интегральные кривые необходимо продолжить в область $V > 1$. Все интегральные кривые, получающиеся при таком продолжении, выходят на параболу $z = (1-V)^2$. Это означает, что в решение надо ввести ударную волну. Легко доказать [1], что скачок надо построить из точки пересечения интегральной кривой с параболой $z^7 = [2\gamma_0/(\gamma_0-1)](1-V)^2$, чтобы пе-

рейти на интегральную кривую $z=0$, по которой можно достигнуть точки $z=0$, $V=\infty$, $\lambda=0$, соответствующей малому отверстию между сосудами А и соплом В (фиг. 1). Таким образом доказано, что возможно построение решения уравнений газодинамики, содержащего пять сильных разрывов в области течения ($0 \leq \lambda \leq 1$): три ударных волны, контактный разрыв и волну горения.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. На практике важным случаем является значение $\omega=2$, что соответствует сверхзвуковому истечению горючей смеси из конического сопла. Анализ интегральных кривых уравнений (2.2) при $\omega=2$, $\nu=3$ показывает, что возможны все режимы для детонации и горения, которые осуществляются при $\omega=0$. При этом режим Ч — Ж для детонации и горения возможен только при $V_1 \geq \gamma_2^{-2}$. Заметим, что из автомодельности задачи следует $z_1=0$.

Рассмотренные выше решения могут быть обобщены на случай распространения волн поглощения, когда Q задается условием поглощения электромагнитной (световой) энергии. Для этого случая величину Q в условиях типа (3.1) следует задать в виде $Q=J/\rho_* D_*$, где $J=J(t)$ — удельный поток энергии, поглощенный непосредственно за скачком; ρ_* , D_* — характерные плотность и скорость (для волны детонации $\rho_*=\rho_1$, $D_*=D$).

4. Расчеты проводились для случая $\omega=0$. Полагалось, что горючая смесь находится в покое: $v_1=0$, а давлением p_1 можно пренебречь по сравнению с давлением за первой волной. Условия на первом скачке запишутся так:

$$(4.1) \quad v_2 = \frac{1+\gamma_2\beta}{\gamma_2+1} D, \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2+1}{\gamma_2(1-\beta)} \rho_1, \quad p_2 = \frac{1+\gamma_2\beta}{\gamma_2+1} \rho_1 D^2$$

Воспользуемся безразмерными переменными, вытекающими из определений (2.1) и условий (4.1)

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \quad f = \frac{v}{v_2} = \frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_2\beta} \lambda V$$

$$g = \frac{\rho}{\rho_2} = \frac{\gamma_2(1-\beta)}{1+\gamma_2} R, \quad h = \frac{p}{p_2} = \frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_2\beta} \lambda^2 P$$

Если теперь в уравнениях системы (1.2) заменить искомые функции $v(r, t)$, $\rho(r, t)$, $p(r, t)$ функциями $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, которую нужно проинтегрировать в интервале $0 \leq \lambda \leq 1$.

Баланс массы и энергии газа в возмущенной области выразится соотношениями [1]

$$(4.2) \quad \mu = \int_0^{\lambda_p} \frac{1+\gamma_2}{\gamma_2(1-\beta)} g \lambda^{\nu-1} d\lambda = \frac{m}{(\alpha_1+1)\rho_1} \left(\lambda_0 \sqrt{\frac{m}{n}} \right)^\nu$$

$$\varepsilon = \int_0^1 \frac{(1+\gamma_2\beta) g \lambda^{\nu+1}}{\gamma_2(1-\beta)(1+\gamma_2)} \left[\frac{f^2(1+\gamma_2\beta)}{2} + \frac{\gamma_i h}{g} \frac{1-\beta}{\gamma_i-1} \right] d\lambda - \frac{\eta}{\nu} =$$

$$= \frac{n}{(\alpha_2+1)\rho_1} \left(\lambda_0 \sqrt{\frac{m}{n}} \right)^{\nu+2}, \quad \eta = \frac{Q}{D^2}$$

Отсюда находим постоянную

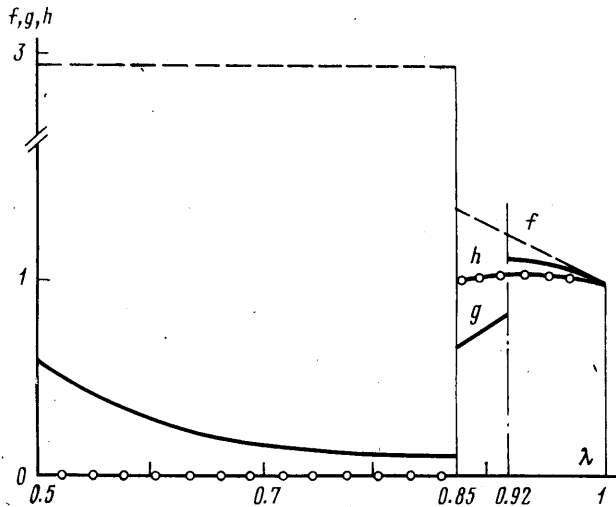
$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{(1+\alpha_2)}{(1+\alpha_1)}}$$

В области течения газа, соответствующей интегральной кривой $z=0$, уравнения для функций f, g, h легко интегрируются

$$h=0, f=f_1$$

$$g=g_1 \left\{ \frac{(f_1/\lambda) (1+\gamma_2\beta) - 1 - \gamma_2}{(f_1/\lambda_1) (1+\gamma_2\beta) - 1 - \gamma_2} \right\}^{\nu-1}$$

где λ_1, f_1, g_1 — значения перед скачком в инертном газе. Результаты численных расчетов для $\nu=3$ приведены на фиг. 3 (пересжатая детонация) и



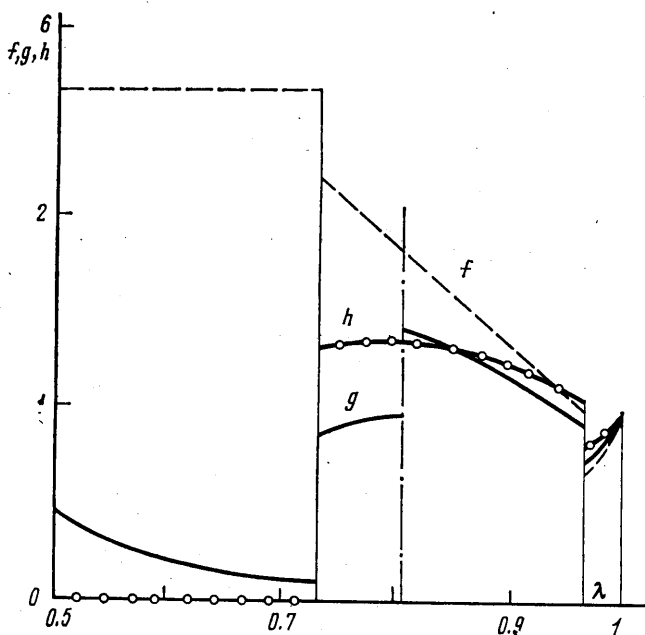
Фиг. 3

на фиг. 4 (детонация Ч — Ж со вторым скачком). Вертикальной штрихпунктирной линией показана контактная поверхность. Для пересжатой детонации при $\nu=3$, $\eta=Q/D^2=81/350$, $\gamma_2=4/3$ значения интегралов (4.2) равны $\mu=0.728$, $\varepsilon+1/3\eta=0.794$. Для детонации Ч — Ж с дополнительным скачком уплотнения $\eta=9/14$ при $\gamma_2=4/3$, а значение интегралов (4.2) $\mu=0.382$, $\varepsilon+1/3\eta=0.448$.

Расчеты проводились также и для случая $Q=0$, $\omega=0$, который был изучен ранее в [4]. Данные этих расчетов могут быть использованы для вычисления кинетики химических реакций в предположении малого влияния теплового эффекта [5].

В заключение отметим, что можно также рассмотреть автомодельные течения газа с учетом вязкости и теплопроводности. Если коэффициенты вязкости и теплопроводности принять пропорциональными температуре в некоторой степени S , то из условий автомодельности следует, что $\omega=\nu-2$ для любого показателя степени S .

В рассмотренных выше схемах характер устойчивости полученных решений не изучался. Учет противодействия, кинетики химических реакций и других физических процессов в общем случае приведет к потере автомодельности. Полученные решения могут служить точными началь-



Фиг. 4

ными данными для расчета конечно-разностными методами неавтономных задач.

Авторы отмечают также, что часть результатов настоящей работы была доложена и обсуждена на V Всесоюзном совещании по аналитическим методам в газодинамике (г. Москва, июнь 1972 г.).

Поступила 5 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Марченко Т. В., Якимов Ю. Л. О нестационарных движениях газа в ударных трубах переменного сечения. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
3. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.
4. Lee J. H. The propagation of shocks and blast waves in a detonating gas. Mechanical Engineering, McGill Univ. Publ., Mech. Eng. Res. Lab., 1965, Rept 65-1.
5. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва в газах, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1973, т. 119.