

## О ПРИМЕНЕНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОТРЫВЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

А. Н. ПОКРОВСКИЙ, В. Н. ШИМАНЕНКОВ

(Москва)

В предположении о выполнении локального подобия из уравнений пограничного слоя выводятся соотношения между интегральными величинами. Полученные зависимости могут быть использованы в качестве дополнительных связей при решении системы интегральных соотношений общего вида. Применение дополнительных связей показано на примере задачи об отрывной зоне перед плоским щитком при наличии теплообмена, которая решается с помощью интегрального метода. При расчете отрывной зоны на холодных поверхностях для ликвидации ряда трудностей вверх по течению от точки отрыва использована универсальная эпюра давления Кёрла. Проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных, показавшее их удовлетворительное согласие.

В современных методах расчета отрывных и присоединенных течений широко используются интегральные соотношения теории пограничного слоя [1-5]. Интегральные величины  $\delta^*$  (толщина вытеснения),  $\delta^{**}$  (толщина потери импульса),  $\Phi$  (толщина потери механической энергии) и т. д. обычно определяются на основании одно- или двухпараметрического семейства профилей скорости и энтальпии. В качестве такого семейства профилей могут быть использованы профили Стюарта-Козна - Решотко [6] или локально-подобные решения уравнений пограничного слоя. В этом случае между интегральными величинами существуют простые соотношения, которые могут быть использованы в качестве дополнительных при решении задачи об отрыве пограничного слоя интегральным методом. Это позволяет уменьшить число параметров, входящих в систему интегральных соотношений.

Как известно, при расчетах параметров отрывных зон на холодных поверхностях интегральными методами необходимо преодолевать трудности, связанные с невозможностью осуществления плавного перехода от начальных параметров пограничного слоя к отрывным («сверхкритический пограничный слой» [1, 5, 11]). В ряде работ (например, [5, 11]) предлагается ввести скачкообразный переход от параметров сверхкритического слоя к «докритическим» параметрам, используя законы сохранения массы, импульса и энергии. Экспериментальные данные, однако, показывают, что параметры во всей области взаимодействия изменяются плавно. Таким образом, указанная выше особенность не связана с физической природой отрывных зон, а является результатом несовершенства применяемых расчетных методов, в частности результатом использования приближенных профилей скорости и энтальпии Стюарта-Козна - Решотко [6].

Ниже с целью преодоления этих трудностей предлагается ввести в рассмотрение дополнительное соотношение - универсальную кривую распределения давления в области свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком, полученную Кёрлом [7]. Данная зависимость используется на участке области взаимодействия до тех пор, пока пограничный слой не станет докритическим. Такой прием позволяет упростить решение задачи и получить эпюры распределения давления и тепловых потоков во всей отрывной зоне, согласующиеся с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим уравнение ламинарного сжимаемого пограничного слоя в предположении выполнения локального подобия [8]

$$(1.1) \quad f''' + ff'' + \beta(g - f'^2) = 0, \quad f' = df/d\eta$$

$$(1.2) \quad g'' + \text{Pr} fg' + 2\alpha_\infty^2 (\text{Pr} - 1) [f'f'']' = 0$$

$$\xi = C \int_0^x \frac{p_e a_e}{\rho_t a_t} dx, \quad \eta = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{U_e}{v_t \xi} \frac{a_e}{a_t} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy$$

$$f = \sqrt{\frac{m+1}{2v_t U_e \xi}} \psi, \quad f' = \frac{u}{u_e}, \quad g = \frac{J}{J_e}, \quad C = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_t \mu_t}$$

$$\beta = \frac{2m}{m+1}, \quad U = \frac{a_t}{a_e} u, \quad U_e = C_1 \xi^m$$

Здесь  $\psi(x, y)$  — функция тока,  $J, \rho, \mu, u$  — соответственно полная энтальпия, плотность, вязкость и скорость газа,  $Pr$  — число Прандтля,  $\alpha_e^2$  — число Крукко,  $x, y$  — прямоугольная система координат, связанная с контуром тела. Индекс  $e$  соответствует параметрам на границе пограничного слоя,  $w$  — на теле,  $t$  — полному изэнтропическому торможению во внешнем потоке.

Граничные условия для системы (1.1), (1.2) имеют вид

$$f = f_w, \quad f' = 0, \quad g = g_w, \quad \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Если к уравнениям (1.1), (1.2) добавить уравнение (1.1), умноженное на  $f'$ , и проинтегрировать их по  $\eta$  от 0 до  $\infty$ , получим

$$(1.3) \quad (1+\beta) \Delta_a^{**} = f_w'' - \beta(\Delta_a^* - E_a) - f_w$$

$$(1.4) \quad T_a = Pr^{-1} g_w' - (1-g_w) f_w$$

$$(1.5) \quad (1+2\beta) \vartheta_a = 2R_a + 2\beta T_a - f_w$$

$$\Delta_a^* = \int_0^\infty (1-f') d\eta, \quad \Delta_a^{**} = \int_0^\infty f'(1-f') d\eta$$

$$E_a = \int_0^\infty (1-g) d\eta, \quad T_a = \int_0^\infty (1-g) f' d\eta,$$

$$\vartheta_a = \int_0^\infty f'(1-f'^2) d\eta, \quad R_a = \int_0^\infty f''' d\eta$$

Соотношения (1.3), (1.4) при  $f_w = 0$  были ранее получены в [6, 9]. В физической плоскости  $xy$  соотношения (1.3)–(1.5) имеют вид

$$\delta^{**} = (1-0.5\beta) \frac{dx}{d \ln \xi} C_{f_w} - \beta(1-\alpha_e^2) (\delta^* + \delta^{**}) + G_w$$

$$T^* = (2-\beta) \frac{dx}{d \ln \xi} St + G_w$$

$$(1+2\beta) \delta^{***} = (1-0.5\beta) \frac{dx}{d \ln \xi} R^* + 2\beta(1-g_w) T^* + G_w$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy,$$

$$\delta^{***} = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left[ 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right] dy$$

$$\beta = \frac{d \ln M_e}{dx} \left( \frac{d \ln M_e}{dx} + \frac{d \ln \xi}{dx} \right)^{-1}$$

$$T^* = \int_0^{\infty} \frac{(1-g)}{(1-g_w)} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy$$

$$St = \frac{\lambda_w (\partial J / \partial y)_w}{\rho_e u_e c_p (J_e - J_w)}, \quad R^* = \int_0^{\infty} (c_f \sqrt{Re_\xi})^2 dy$$

Здесь  $c_{fw} = 2\tau_w / \rho_e u_e^2$  — коэффициент трения,  $G_w = \rho_w \vartheta_w / \rho_e u_e$  — параметр вдува.

Известно, что для повышения точности определения характеристик пограничного слоя интегральные соотношения импульсов и энергии можно дополнить бесчисленным множеством интегральных уравнений, получаемых путем умножения уравнения импульсов на  $u^k$  с последующим интегрированием поперек слоя. В этом случае в плоскости  $\xi, \eta$  в новые интегральные соотношения войдут величины типа [8]

$$\Delta_k^{**} = \int_0^{\infty} f' (1 - f'^{k-1}) d\eta, \quad \Delta_k^* = \int_0^{\infty} (1 - f'^k) d\eta$$

Применяя этот прием к уравнениям (1.1), (1.2), получим следующие рекуррентные соотношения:

$$(1.6) \quad \Delta_k^{**} = \frac{k-1}{1+\beta(k-1)} \left[ \beta \Delta_{k-2}^{**} + \beta E_k + (k-2) R_k - \frac{f_w}{k-1} \right]$$

$$(1.7) \quad \Delta_k^* = \frac{k-1}{1+\beta(k-1)} \left[ \beta \Delta_{k-2}^* + \beta E_k + (k-2) R_k - \frac{\Delta^* - f_w}{k-1} \right]$$

$$R_k = \int_0^{\infty} f''^2 f'^{(k-3)} d\eta, \quad E_k = \int_0^{\infty} (1-g) f'^{(k-2)} d\eta$$

Соотношения (1.6), (1.7), так же как и (1.3)–(1.5), могут быть применены в качестве дополнительных связей при расчете параметров пограничного слоя методом интегральных соотношений с использованием уравнений моментов высшего порядка.

2. Рассмотрим в качестве примера практического применения предложенных соотношений задачу об определении параметров зоны отрыва ламинарного пограничного слоя перед плоским щитком в сверхзвуковом потоке при наличии теплопередачи. Применим метод интегральных соотношений, базирующийся на уравнениях количества движения, первого момента количества движения и уравнения энергии. Внешний невязкий поток описывается уравнениями Прандтля — Майера (использование соотноше-

ний Прандтля — Майера не является принципиальным, внешний поток может быть рассчитан любым конечно-разностным методом).

В отличие от работ [1, 5, 11] уравнение взаимосвязи между вязким диссипативным потоком и внешним невязким течением имеет вид  $d\delta^*/dx = \text{tg } \nu$ , где  $\nu$  — угол отклонения вектора скорости на внешней границе вязкой области от первоначального направления набегающего потока. Незвестными функциями являются: нормированная толщина вытеснения

$$\Delta_1^* = \frac{\Delta^*}{L} \sqrt{\frac{M_e \text{Re}_{iL}}{2\xi_1}}, \quad \Delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{a_e \rho}{a_i \rho_i} dy,$$

$$\text{Re}_{iL} = \frac{a_i L}{\nu_i}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{L}$$

число Маха на внешней границе пограничного слоя  $M_e$ , форм-параметр  $H = \Delta^*/\Delta^{**}$  и коэффициент теплообмена  $b = g_w'/(1 - g_w)$ .

После проведения некоторых преобразований исходная система дифференциальных уравнений в переменных Дородницына — Стюартсона при  $\text{Pr} = 1$ ,  $c_p = \text{const}$ ,  $\mu \sim T$  может быть представлена в форме [5]

$$(2.1) \quad \frac{d \ln \Delta_1^*}{dx_1} = \frac{d \ln H}{dx_1} - [1.5 + H + (g_w - 1)EH] \frac{d \ln M_e}{dx_1} + \\ + \Phi_1 \frac{PH}{\Delta_1^{*2}} - \frac{d \ln \xi_1}{2dx_1}$$

$$(2.2) \quad \frac{db}{dx_1} = \frac{db}{d \ln T} \left\{ [1 + H + (g_w - 1)EH] \frac{d \ln M_e}{dx_1} - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{d \ln T}{d \ln H}\right) \frac{d \ln H}{dx_1} + \frac{\Phi_1}{\Delta_1^{*2}} \left(\frac{Q}{T} - PH\right) \right\}$$

$$(2.3) \quad \left[1 - \frac{d \ln J_1}{d \ln H}\right] \frac{d \ln H}{dx_1} + \\ + [1 - H - (g_w - 1)EH + 2(g_w - 1)TJ_1] \frac{d \ln M_e}{dx_1} = \frac{\Phi_1}{\Delta_1^{*2}} (J_1 R - PH)$$

$$(2.4) \quad \left[1 + (g_w - 1)E + (g_w - 1) \frac{dE}{d \ln H} - \right. \\ \left. - (g_w - 1) \frac{dE}{db} \frac{db}{d \ln T} \left(1 + \frac{d \ln T}{d \ln H}\right)\right] \frac{d \ln H}{dx_1} + \\ + \left[ \left(\frac{3\kappa - 1}{\kappa - 1} \alpha_e^2 - 2 - H - (g_w - 1)EH\right) \left(1 + (g_w - 1)E + \frac{\alpha_e^2}{H}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha_e^2(1 - \alpha_e^2)}{H} + (g_w - 1) \frac{dE}{db} \frac{db}{d \ln T} (1 + H + (g_w - 1)EH) \right] \frac{d \ln M_e}{dx_1} = \\ = \frac{\text{tg } \nu}{\Delta_1^*} \sqrt{\frac{M_e \text{Re}_{iL}}{2\xi_1}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{1}{2}} - \\ - \frac{\Phi_1}{\Delta_1^{*2}} \left[PH \left(1 + (g_w - 1)E + \frac{\alpha_e^2}{H}\right) + (g_w - 1) \frac{dE}{db} \frac{db}{d \ln T} \left(\frac{Q}{T} - PH\right)\right],$$

$$(2.5) \quad x_1 = \frac{x}{L}, \quad \gamma = -\frac{3\kappa-1}{2(\kappa-1)}$$

$$\frac{d\xi_1}{dx_1} = C \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_e^2 \right)^\gamma, \quad \Phi_1 = \frac{C}{2\xi_1} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_e^2 \right)^\gamma$$

$$E = \frac{1}{\Delta_a^*} \int_0^\infty \frac{1-g}{1-g_w} d\eta, \quad P = \Delta_a^* f_w'', \quad J_1 = \frac{\Delta_a^*}{\vartheta_a}, \quad Q = b\Delta_a^*$$

$$T = \frac{1}{\Delta_a^*} \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \frac{(1-g)}{(1-g_w)} d\eta, \quad R = 2\Delta_a^* \int_0^\infty f''^2 d\eta$$

Интегральные величины  $P, J_1, R, T, E$  при заданной температуре стенки  $g_w$  являются функциями двух форм-параметров ( $H(x_1)$  и  $b(x_1)$ ). Вид этих функций определяется на основании точного численного расчета системы (1.1), (1.2). Анализ расчетных данных, полученных при  $g_w=0, 0.2, 0.6, 1$ , показывает, что зависимостью некоторых интегральных величин от параметра  $b$  можно пренебречь, к ним относятся величины  $J_1=J_1(H), P=P(g_w, H)$ .

Вид функций  $E, T$  и  $R$  является более сложным и представляется, например, в виде полиномов шестой степени [5]. Соотношения (1.3), (1.5) позволяют упростить процесс нахождения некоторых из этих функций. Действительно, уравнения (1.3), (1.5) можно переписать в виде

$$PH = \Delta_a^{*2} [H\beta(1+(g_w-1)E) + 1 + \beta]$$

$$J_1 R = \Delta_a^{*2} [1 + 2\beta + 2\beta J_1 T (g_w - 1)]$$

Отсюда после исключения параметра  $\beta$  имеем

$$(2.6) \quad J_1 R [H(1+(g_w-1)E) + 1] = \Delta_a^{*2} [H(1+(g_w-1)E) + 1] + 2[1 + J_1 T (g_w - 1)] [PH - \Delta_a^{*2}]$$

Это уравнение служит для определения параметра  $R$ , который, следовательно, является функцией всех трех параметров (в отличие от работ [5, 10]).

Сформулируем теперь краевую задачу для системы (2.1)–(2.5). Вдали от места излома, т. е.  $x \rightarrow \pm\infty$ , внешний поток равномерен, а параметры течения в пограничном слое близки к параметрам течения Блазиуса. Обозначим через  $x_0$  точку начала взаимодействия, т. е. точку, в которой впервые выполняется условие  $dM_e/dx_1 < 0$ . Предполагается, что при подходе к точке  $x_0$  слева интегральные параметры пограничного слоя такие же, как при слабом взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком [4]. Из точки  $x_0$  исходит бесконечное множество интегральных кривых, однако для осуществления перехода к отрывному течению этих условий недостаточно. Необходимо допустить, что в точке  $x_0$  имеет место соотношение  $M_{e0} = M_{eB} - \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  — некоторая малая положительная величина (обычно в расчетах принималось, что  $0.001 < \varepsilon_1 < 0.05$ ).

Изменение величины начального возмущения  $\varepsilon_1$  эквивалентно сдвигу точки  $x=x_0$ , причем характеристики отрывного течения при этом мало отличаются одна от другой. Заметим, что выбор величины  $\varepsilon_1$  не может быть сделан из рассмотрения только локальных свойств течения в окрестности точки  $x_0$ . Он связан с решением задачи в целом, т. е. с замыкающими условиями на щитке. В качестве замыкающего условия для прямолинейного щитка бесконечной протяженности может быть выбрано усло-

вие достижения параметров течения Блазиуса при новых условиях во внешнем потоке. В случае щитка конечной длины замыкающим условием служит обращение в бесконечность производных  $dM_e/dx$  и  $dH/dx$  в верхней кромке щитка [4], что соответствует интенсивному развороту потока в донную область. Выполнение указанных условий при заданных  $M_\infty$ ,  $Re_{L_\infty} = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$ ,  $g_w$ ,  $\theta_1$  (угол щитка) и  $x$  достигается изменением положения точки  $x_0$ .

Дальнейший анализ системы (2.1)–(2.5) показывает, что описанные выше краевые условия могут быть выполнены, если температура поверхности  $g_w$  близка к температуре теплоизолированной стенки. В этом случае пограничный слой является докритическим [1, 11]. Он характеризуется тем, что его утолщение приводит к возрастанию давления во внешнем потоке, которое тем самым вызывает еще большее утолщение слоя,  $dp/d\delta > 0$ . Сверхкритический пограничный слой обладает тем свойством, что в нем  $dp/d\delta < 0$ . При низких температурах поверхности в точке  $x_0$  детерминант системы (2.1)–(2.5)  $D < 0$  (сверхкритический пограничный слой), а между точками  $x_0$  и  $x_s$  (точка отрыва) существует особая точка  $x^*$ , где  $D = 0$ .

Поскольку в точке  $x_s$  пограничный слой при любом значении величины  $g_w$  носит докритический характер ( $D > 0$ ), плавный переход от сверхкритического слоя к докритическому невозможен. В ряде работ [11] предлагается осуществлять скачкообразный переход от параметров сверхкритического потока к докритическому, основываясь на законах сохранения массы, импульса, первого момента количества движения и энергии. Однако анализ большого количества экспериментальных данных показывает, что параметры отрывной зоны как на горячих, так и на холодных поверхностях изменяются плавно. Обобщение экспериментальных данных позволило Кёрлу [7] в специальных переменных предложить следующую универсальную кривую для распределения давления как для теплоизолированных, так и для холодных поверхностей:

$$(2.7) \quad x_k = 1.82 (M_\infty^2 - 1)^{1/4} Re_s^{1/4} \frac{T_e}{T_w} \left( \frac{x}{x_s} - 1 \right)$$

$$F(x_k) = 0.4096 (M_\infty^2 - 1)^{1/4} Re_s^{1/4} 2 \left( \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2} \right)$$

Координаты этой универсальной кривой хорошо аппроксимируются в диапазоне  $-7 < x_k \leq 0$  выражением

$$(2.8) \quad F(x_k) = 0.338 \exp[a_1 x_k^2 + b_1 x_k]$$

где  $a_1 = -0.0213$ ,  $b_1 = +0.2643$ .

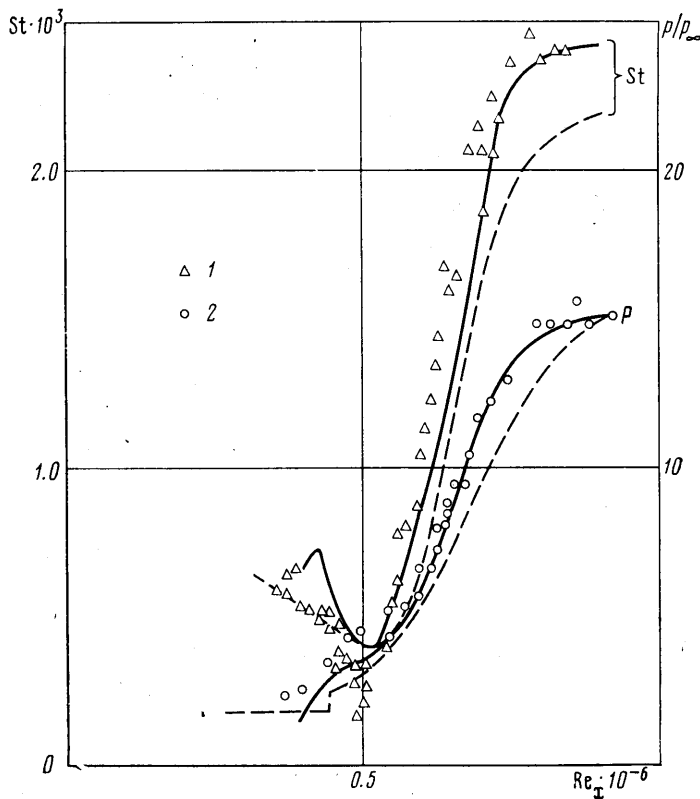
Ниже предлагается использовать универсальную эпюру давления Кёрла (2.7), (2.8) для расчета параметров области взаимодействия на отрезке  $x_0, x_s$ . При таком подходе интегрирование системы (2.1)–(2.3), (2.5) проводится без уравнения взаимосвязи (2.4) в соответствии с заданным распределением давления, определяемым из уравнения (2.8). На каждом шаге интегрирования вниз по течению от точки  $x = x_0$  проверяется знак знаменателя системы  $D$ . Как только окажется, что  $D > 0$ , т. е. слой стал докритическим, то от этого сечения проводится интегрирование полной системы (2.1)–(2.5), а значения параметров в этом сечении используются в качестве начальных.

Граничные условия на щитке также изменяются, поскольку вниз от точки присоединения разделяющей линии тока будет существовать точка, где  $D = 0$  («критическая» точка Крокко – Лиза [12]). Условия прохожде-

ния через эту точку, равенства  $D=D_M=D_H=D_{\Delta^*}=D_b=0$ , являются замыкающим условием для системы (2.1)–(2.5), позволяющим однозначно определить положение точки  $x_0$  и распределение параметров в ламинарной зоне отрыва.

Интегрирование системы (2.1)–(2.5) осуществлялось по стандартной программе Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

На фигуре представлено сравнение расчетных и экспериментальных данных по распределению давления  $p/p_\infty$  и чисел Стантона  $St$  в зоне от-



рыва перед щитком с углом  $\theta_1=12^\circ$  на холодной стенке ( $g_w=0.22$ ) при числе Маха набегающего потока  $M_\infty=12.2$  и числе Рейнольдса, рассчитанном по параметрам набегающего потока и длине пластины перед щитком, равным  $0.52 \cdot 10^6$ . Точки 1, 2 соответствуют экспериментальным, а пунктирная кривая – расчетным данным работы [5]. Сплошной кривой представлено решение системы (2.1)–(2.5) с использованием соотношения (2.6) и универсальной эпюры давления (2.7), (2.8). Наилучшее согласование с экспериментальными данными дает сплошная кривая.

Поступила 26 V 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лиз, Ривз. Сверхзвуковые отрывные и присоединяющиеся ламинарные течения, ч. 1. Общая теория и применение ее для анализа взаимодействия скачка уплотнения с адиабатическим пограничным слоем. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 11.
2. Бондарев Е. Н. Приближенный расчет взаимодействия сверхзвукового потока с ламинарным слоем в области отрывного течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.

3. Савельев Ю. П. Об использовании интегральных уравнений высших моментов для расчета срывных зон в сверхзвуковых течениях. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1975, № 13, вып. 3.
  4. Коу, Кубота. Сверхзвуковой ламинарный пограничный слой вдоль двумерного адиабатического криволинейного профиля сжатия. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 2.
  5. Джорджеф М. Р. Интегральный метод исследования вязко-невязких взаимодействий при произвольном охлаждении стенки. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 10.
  6. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NASA Rept., 1956, No. 1293.
  7. Curle N. The effects of heat transfer on laminar — boundary — layer separation in supersonic flow. Aeronaut. Quart. 1961, vol. 12, No. 4.
  8. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
  9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
  10. Клайнберг, Лиз. Теория ламинарного вязко-невязкого взаимодействия в сверхзвуковом потоке. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 12.
  11. Гранж, Клайнберг, Лиз. Отрыв ламинарного пограничного слоя и ближний след при обтекании гладкого затупленного тела потоком со сверх- и гиперзвуковыми скоростями. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 6.
  12. Крокко Л., Лиз Л. Теория смешения для определения взаимодействия диссипативного и почти изэнтропического потоков. Вопр. ракетн. техн., 1953, № 2.
-