

О ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
ЧЕРЕЗ ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ТРУБКУ С ЛОКАЛЬНЫМ  
СУЖЕНИЕМ

С. Г. МИРОЛЮБОВ

(Москва)

Исследование течения крови по артериям с локальным сужением, называемым стенозом, привело к использованию численных методов для расчета движения вязкой жидкости по трубкам с переменным по длине радиусом просвета. В [1] приведен расчет уравнений Навье – Стокса для стационарного потока через одиночное сужение в трубке. Многие авторы использовали интегральные методы решения упрощенных форм стационарного уравнения движения [2-4]. В [5] найдено решение задачи о пульсирующем потоке через твердую прямую трубку с сужением. При этом авторы ограничились рассмотрением уравнения импульсов в проекции на продольную ось, в котором радиальной скоростью пренебрегалось. При помощи уравнения переноса завихренности в [6] были рассчитаны случаи стационарного, осциллирующего и пульсирующего потоков в плоском двумерном канале с прямоугольным выступом. Осесимметричный случай пульсирующего потока в трубке с определенным изменением радиуса по длине исследовался в [7] методом возмущений. Для изучения течения в районе стеноза в [8] был использован обобщенный лагранжево-эйлеровый метод. Для сосуда произвольной осесимметричной геометрии и для произвольной формы зависимости расхода от времени в [9] указанная задача была решена в квазистационарном приближении.

Представленная работа посвящена расчету ламинарного пульсирующего течения крови как вязкой несжимаемой жидкости по жесткой осесимметричной стенозированной артерии, радиус которой является произвольной, непрерывно дифференцируемой и отличной от нуля функцией продольной координаты  $R_w(Z)$ .

1. Введем цилиндрическую систему координат  $R, \Theta, Z$ , для которой ось  $Z$  совпадает с осью сосуда, а  $R$  и  $\Theta$  являются радиальным и тангенциальным направлениями соответственно. Тогда движение крови будет описываться уравнениями Навье – Стокса с соответствующими начальными и граничными условиями, которые в безразмерных переменных вихря  $\omega$  и функции тока  $\psi$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r\omega$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\omega}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega}{r} \right) =$$

$$= \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega}{r} \right) \right]$$

$$\psi = \psi_0(r, z), \quad \omega = \omega_0(r, z) \quad (t=0)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \omega = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w(z)} \quad (r=r_w(z))$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega = 0 \quad (r=0)$$

$$\psi = \psi_1(r, t), \quad \omega = \omega_1(r, t) \quad (z=0); \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (z=l)$$

Последнее условие в случае достаточно длинного участка постоянного радиуса за область стеноза соответствует непрерывному бесконечному продолжению трубки с постоянным радиусом. Здесь и далее

$$z = \frac{Z}{R_0}, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad r_w = \frac{R_w}{R_0}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad t = \frac{TU_0}{R_0}$$

$$v = \frac{V}{U_0}, \quad \psi = \frac{\Psi}{U_0 R_0^2}, \quad \omega = \frac{\Omega R_0}{U_0}, \quad p = \frac{P}{\rho U_0^2}, \quad l = \frac{L}{R_0}$$

$$Re = \frac{2R_0 U_0}{\nu}, \quad RV = -\frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad RU = \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\partial V}{\partial Z}$$

где  $R_0, U_0, \rho, \nu$  — характерные значения длины и скорости, плотность и вязкость соответственно;  $T$  — время;  $U$  и  $V$  — осевая и радиальная компоненты скорости;  $L$  — длина трубки;  $P$  — давление.

После преобразования системы координат  $\eta = r/r_w(z)$ ,  $\xi = z$ ,  $\tau = t$  уравнения, начальные и граничные условия приводятся к виду

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\eta R'}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{(\eta R')^2 + 1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{2\eta^2 (R')^2 - \eta^2 R R'' - 1}{\eta R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \eta R \omega$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{R \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\omega}{R} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\omega}{R} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\omega}{R \eta} \right] =$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\eta R'}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{(\eta R')^2 + 1}{R^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(\eta R')^2 + 1 - \eta^2 R R''}{\eta R^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{\eta^2 R^2} \right]$$

$$(1.3) \quad \omega = \omega_{00}(\eta, \xi), \quad \psi = \psi_{00}(\eta, \xi) \quad (\tau=0)$$

$$(1.4) \quad \psi = \omega = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta=0); \quad \psi = \psi_{11}(1, \tau), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0,$$

$$\omega = \frac{(R')^2 + 1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=1} \quad (\eta=1)$$

$$(1.5) \quad \psi = \psi_{11}(\eta, \tau), \quad \omega = \omega_{11}(\eta, \tau) \quad (\xi=0); \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi=l)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $\xi$ ,  $R = r_w(z)$ .

Для решения уравнений (1.1), (1.2) с граничными и начальными условиями (1.3)–(1.5) использовалась равномерная по времени и пространству сетка, на которой эти уравнения аппроксимировались конечно-разностными соотношениями с точностью порядка  $O(H^2)$  и  $O(\Delta T^2)$ , где  $H$  и  $\Delta T$  — величины шагов по пространству и времени соответственно. Решение эллиптического уравнения для функции тока (1.1) находилось по неявным итерационным схемам — методу Зейделя и методу верхней релаксации. Параболическое уравнение переноса завихренности решалось при

помощи трехточечной схемы по времени и девятиточечной по пространству типа Кранка — Никольсона.

Полученные распределения вихря и функции тока, являющиеся решением соответствующей разностной задачи, использовались для нахождения распределений скорости, давления и напряжения трения. Из уравнений Навье — Стокса легко получить следующие соотношения для функции Бернулли  $B = p + \frac{1}{2}(u_2 + v^2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \xi} &= \eta R' \left[ \frac{\omega}{\eta R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\eta R'}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R'}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \tau} + \frac{1}{\eta R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \omega \left( \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta R} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\omega}{R \eta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\eta R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \eta} \\ \frac{\partial B}{\partial \eta} &= R \left[ \frac{\omega}{\eta R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\eta R'}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta R} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned}$$

Из этих соотношений с помощью разностных схем второго порядка по времени и пространству находится распределение  $B(\xi, \eta, \tau)$ , а после нахождения поля скорости численным дифференцированием функции тока определяется и распределение давления  $p(\xi, \eta, \tau)$ . Касательная составляющая тензора напряжений в потоке  $\tau_{rz}$  и напряжение трения на стенке  $\tau_w$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{R^3 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{R^3 \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \omega \right) \\ \tau_w = \omega_w &= \frac{(R')^2 + 1}{R^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=1} \end{aligned}$$

2. В качестве примера приведем некоторые результаты, полученные с помощью описанного алгоритма для задачи со следующими исходными данными:

$$r_w(z) = 1 - (1 - \sqrt{1 - 0.01A}) (z_0^2 - (z - z_1)^2)^3 z_0^{-6}, \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 7, \\ A = 50, \quad l = 20$$

$$\text{Re} = \frac{2R_0 U_0}{\nu} = 50, \quad v(z, r, t) = 0 \quad (z = 0)$$

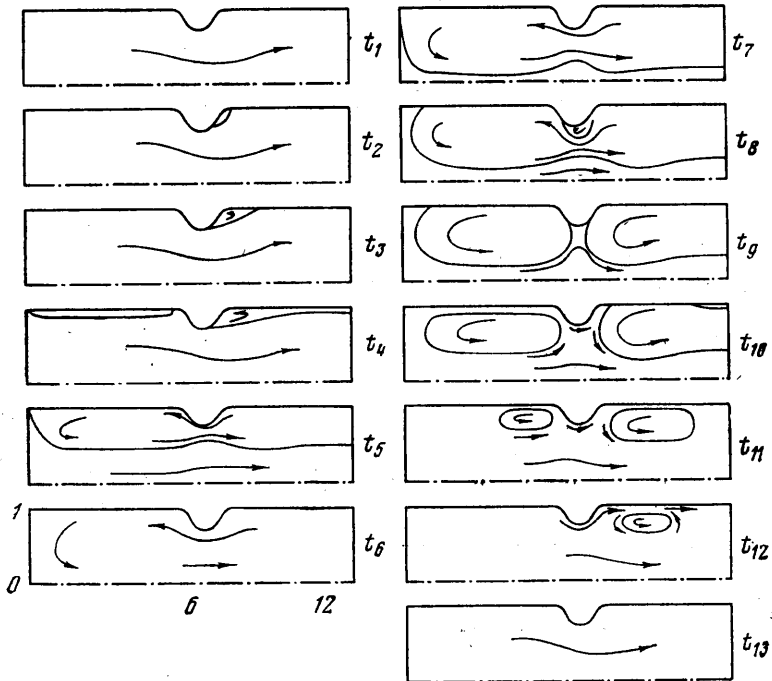
$$u(z, r, t) = 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi t}{t_0} \quad (z = 0, r \neq 1), \quad t_0 = 4.5, \quad u(0, 1, t) = 0$$

При  $\nu = 0.05 \text{ см}^2/\text{сек}$  этот случай соответствует пульсирующему течению крови по артерии радиуса  $R_0 = 0.458 \text{ см}$  с расположенным на расстоянии  $3.2 \text{ см}$  от входа стенозом  $A = 50\%$  длиной в один калибр, выраженным в процентах уменьшения площади поперечного сечения артерии. Период пульсаций  $T_0 = 0.75 \text{ сек}$ , максимальная средняя по сечению скорость на входе в сосуд  $U_0 = 2.739 \text{ см/сек}$ .

Были рассчитаны поля вихря, функции тока, скорости, давления и напряжения трения в потоке. На фиг. 1 показана эволюция картины те-

чения за период. Последовательно представлены моменты времени  $t_1-t_{13}$ , соответствующие значениям 0,90, 2,25, 2,70, 3,15, 4,05, 4,50, 4,60, 4,65, 4,70, 4,75, 4,85, 4,90, 5,40. Стрелки указывают направления движения частиц жидкости.

На пульсирующий поток в прямой трубке накладывается вызванное стенозом возмущение. Возникающая в момент  $t_2$  отрывная зона за сужением растет при уменьшении средней по сечению скорости на входе,  $t_3$  и впоследствии сливается с областями пристеночных обратных токов в невозмущенной зоне. Последние некоторое время разделены областью присоединенного течения в районе стеноза  $t_4$ . Далее течение отрывается по



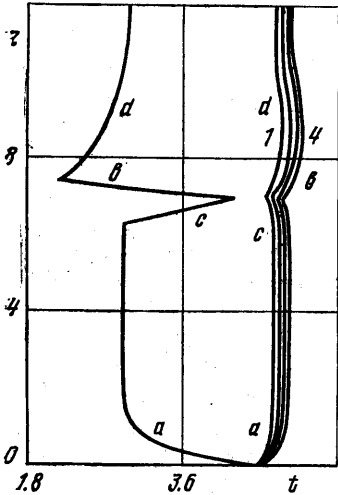
Фиг. 1

всему сосуду  $t_5$ , и в момент, когда объемный расход равен нулю,  $t_6$  отрывная зона занимает всю область течения. Смывание отрывной зоны начинается с прижимания ее к стенкам  $t_7$ , образования вторичного отрыва в горловине  $t_8$ , и смыканием его в этом месте с внешним потоком  $t_9$ . Затем происходит отсоединение разделенных таким образом вихревых зон от стенки, вблизи которой скорость становится положительной, причем этот процесс проявляет некоторое запаздывание за стенозом  $t_{10}$ . Впоследствии уменьшение вихря перед стенозом и локализация в конечной области вначале уходящего в бесконечность вихря за стенозом  $t_{11}$  приводят сначала к ликвидации висячего отрыва перед сужением  $t_{12}$ , а затем к полностью безотрывному течению  $t_{13}$ .

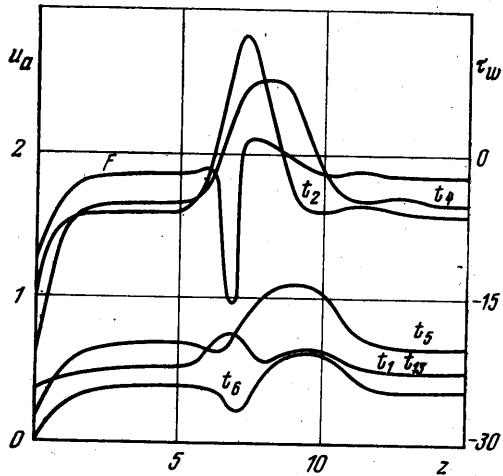
Зависимость координат точек отрыва  $a$ ,  $b$  и точек присоединения  $c$ ,  $d$  от времени показана на фиг. 2. Точку отрыва для зоны, лежащей ниже по потоку относительно стеноза, с достаточной точностью можно рассматривать как неподвижную для промежутка времени порядка половины периода колебаний расхода. Размывание полностью оторванного к моменту  $t_6$  потока происходит на порядок быстрее, чем образование, причем для

данного сечения сосуда трение на стенке становится отрицательным раньше, чем исчезают обратные токи в этом сечении.

По-видимому, для нестационарного течения вязкой жидкости в некоторый момент времени необходимо различать следующие типы поперечных сечений потока: 1) сечение с положительным трением на стенке; 2) сечение, которое пересекают замкнутые мгновенные линии тока; 3) сечение, в котором имеются обратные токи; 4) сечение, в котором существует положительное значение функции вихря. Для стационарного течения эти высказывания тождественны и являются определением сечения



Фиг. 2



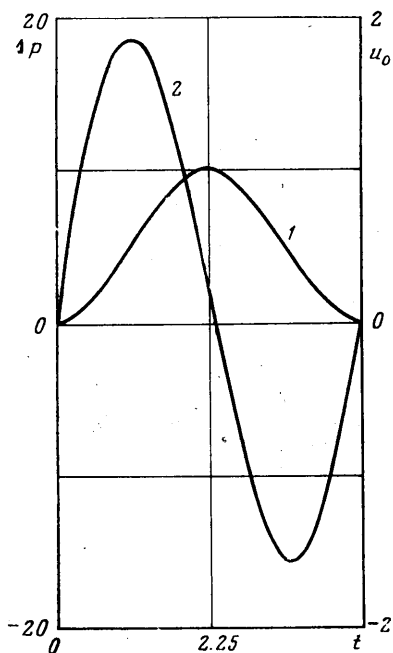
Фиг. 3

отрыва. На фиг. 2 представлена зависимость положения сечений, в которых поток отрывается и присоединяется, от времени. Сечение считается отрывным в смысле определений 1)–4) (кривые 1–4 соответственно). Обычно в литературе по нестационарному отрыву [10] за признак отрыва принимается определение 4).

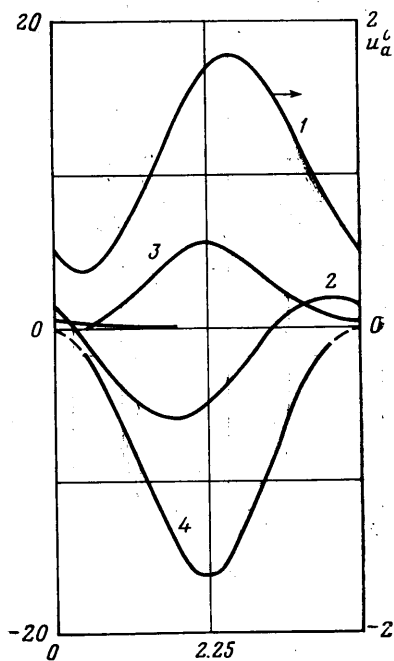
Фиг. 3 показывает, как изменяется зависимость скорости на оси  $u_a$  от координаты  $z$  со временем (моменты  $t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_{12}, t_{13}$ ). Уплотнение максимума скорости и смещение его вниз по потоку характерно для образования отрывной зоны за стенозом. Появление провала на графике скорости в районе стеноза соответствует на фиг. 1 области присоединенного течения в горле ( $t_4$ ), несколько затянутому переходу к полностью оторванному потоку ( $t_5, t_6$ ), последующему более сильному прижатии отрывной зоны к стенкам в районе сужения и образования в этом месте области безотрывного течения ( $t_7 \div t_{12}$ ). Кривая  $F$  дает распределение напряжения трения на стенке в момент  $t_3$ . Обращают на себя внимание большие градиенты напряжения в районе сужения сосуда, а также наличие сильного экстремума в горловине. Часть кривой, лежащая выше нуля, соответствует отрывной зоне и появлению обратных токов. Участки с постоянным трением являются областями невозмущенного течения.

На фиг. 4 показано, как меняются со временем средняя по сечению скорость на входе  $u_c$  и перепад давления на стенозе  $\Delta p$  (кривые 1 и 2 соответственно). Кривые 1–4 на фиг. 5 соответствуют временным зависимостям следующих характеристик потока: значению скорости на оси в невозмущенной области  $u_a^0$ , напряжению трения на стенке в невозмущенной области  $\tau_w^0$ , а также величинам  $\Delta \tau_w^+ = \tau_w^+ - \tau_w^0$  и  $\Delta \tau_w^- = \tau_w^- - \tau_w^0$ , где

$\tau_w^+$  и  $\tau_w^-$  — максимальное и минимальное значения трения в районе стенотического сужения. Кривые  $\tau_w^0$  и  $u_a^0$  имеют сдвиги по абсциссе и ординате относительно квазистационарных, которые, очевидно, софазны временному изменению объемного расхода. На порядок меньший сдвиг имеют и кривые  $\Delta\tau_w^+$  и  $\Delta\tau_w^-$ . Необходимо отметить, что в некоторые моменты времени кривые 3, 4 описывают два максимума и два минимума напряжения трения на стенке, старого и нового. Для упрощения мелкомасштабный процесс замены старого минимума новым на кривой 4 не пока-



Фиг. 4



Фиг. 5

зан. Новый и старый локальные максимумы, расположенные ниже по потоку от области максимального сужения, отчетливо видны на кривой  $F$  (фиг. 3). Из зоны стенотического возмущения течения вниз по потоку распространяются слабые затухающие возмущения в напряжении трения. С ростом числа Рейнольдса  $Re$  эти возмущения растут. Если пренебречь ими, то для чисел  $Re=50$  длина зоны стенотического возмущения потока в 8–10 раз превышает высоту самого стеноза.

Численный эксперимент для той же конфигурации стенки при  $Re=100$  и  $t_0=4.5$  показывает некоторое уменьшение промежутка времени безотрывного течения, характеризуемое более ранним возникновением отрыва за стенозом, более поздним переходом к полностью оторванному потоку в момент  $t_s$  и последующим более длительным смыванием этого отрыва. Несколько увеличивается сдвиг по осям для кривой 2 (фиг. 5) и возрастает величина максимума и минимума кривых 3 и 4. Длина зоны стенотического возмущения потока остается почти неизменной.

Предложенный метод позволяет проводить расчет поля течения для сосудов произвольной конфигурации в рамках осевой симметрии и в случае произвольной формы зависимости расхода от времени. Для рассмотренных чисел  $Re$  абсолютная величина напряжения трения на стенке в районе данного стеноза может в несколько раз превышать ее значение в

нестенозированным сосуде. Для приведенной зависимости расхода от времени максимум и минимум возмущения трения на стенке можно с достаточной точностью считать пульсирующими софазно с расходом по аналогичным законам типа сдвинутой на величину амплитуды синусоиды. Полученные данные о размерах возмущенных зон потока говорят об их слабой зависимости от числа  $Re$  в рассмотренном диапазоне. Изучение процесса возникновения и исчезновения вихревых зон указывает на отличие критерия отрыва и присоединения нестационарного потока от общепринятого в стационарном случае  $\tau_w=0$ .

Поступила 3 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lee J. S., Fung Y. C. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. Trans. ASME: J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 1.
2. Кожевников А. А., Арабидзе Г. Г., Мареева Л. С. Течение крови в почечной артерии с деформированной сосудистой стенкой. Биофизика, 1977, т. 22, вып. 2.
3. Forrester J. H., Young D. E. Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease. 1. Theoretical development. 2. Theoretical and experimental results and their implications. J. Biomechanics, 1970, vol. 3, No. 3.
4. Morgan B. E., Young D. F. An integral method for the analysis of flow in arterial stenosis. Bull. Math. Biol., 1974, vol. 36, No. 1.
5. Ray G., Davids N. Shear stress analysis of blood-endothelial surface in inlet section of artery with plugging. J. Biomechanics, 1970, vol. 3, No. 1.
6. Cheng L. C., Robertson J. M., Clark M. E. Calculation of plane pulsatile flow past wall obstacles. Comput. and Fluids, 1974, vol. 2, No. 3-4.
7. Chow J. C. F., Yuh E. R. J. Effects of pulsatile flow on wall shear with wall irregularity. Proc. 28-th Annual Conf. Eng. Med. and Biol. New Orleans, 1975, vol. 17. Chevy Chase, Md., 1975.
8. Daly B. J. LA-UR-932. Los Alamos Scientific Laboratory, 1974.
9. Back L. D., Radbill J. R., Grawford D. W. Analysis of pulsatile, viscous blood flow through diseased coronary arteries of man. J. Biomechanics, 1977, vol. 10, No. 5-6.
10. Sears W. R., Telionis D. P. Unsteady boundary layer separation. In: Recent Research on Unsteady Boundary Layers. Proc. Sympos. IUTAM, vol. 1. Quebec, 1971.