

**О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ ГЛАДКОГО КОНТУРА**

**В. М. ХАНИН**

(Новосибирск)

Рассматривается потенциальное обтекание гладкого выпуклого контура плоской струей невесомой жидкости. Предполагается, что область течения односвязна, а на контуре есть критическая точка, в которой струя разветвляется. История исследования этой классической задачи отражена в [1-3]. Наиболее законченные результаты получены для случая симметричного обтекания безграничным потоком. Доказана однозначная разрешимость задачи при заданном некоторым образом положении точек отрыва, изучены качественные особенности таких течений, многие из них рассчитаны численно. В то же время для случая обтекания струей конечной ширины многие вопросы остались открытыми. Это относится к проблеме разрешимости прямой задачи, в частности к вопросу о допустимом интервале значений «прицельного расстояния», о характере зависимости от него геометрических и динамических параметров течения.

Этот круг вопросов и составляет предмет статьи. В основе исследования лежит интегральное уравнение для «сглаженного» модуля скорости на контуре, в целом родственное классическому уравнению Вилля и его модификациям [1, 2], однако более удобное для анализа. Для случаев течения с топологией, отличной от рассматриваемой, сходные уравнения изучались в [4, 5].

Доказаны существование и (при некоторых ограничениях) единственность решения исходного уравнения. Аналитически рассмотрено обтекание круга в двух асимптотических случаях: при малых прицельных расстояниях  $b$  и при  $b$ , близких к предельному. В предположении «гладкого» отрыва доказано, что предельным асимметричным случаем обтекания является случай внешнего касания контура с начальным образом струи, т.е. полосой, представляющей собой струю, если бы та не взаимодействовала с контуром. В области промежуточных значений  $b$  задача исследовалась численно. Показана однозначная разрешимость прямой задачи обтекания достаточно тонкой струей на всем допустимом интервале значений  $b$ .

1. Пусть плоская свободная струя шириной  $H$ , разветвляясь, обтекает гладкий выпуклый контур, как показано на фиг. 1. Струя отрывается от контура в точках  $E$  и  $F$ ,  $A$  — критическая точка. Течение предполагается потенциальным, скорость на свободных границах — постоянной (единичной).

Отобразим конформно область течения на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t \geq 0$  так, чтобы точки отрыва перешли в  $t = \pm 1$ , а бесконечно удаленная точка  $D$  — в  $t = \infty$ . Функция  $w(t)$  с производной

$$(1.1) \quad w'(t) = \frac{H}{\pi} \frac{t - \alpha}{(1/\beta - t)(1/\gamma + t)}$$

$$(1.2) \quad -1 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta, \gamma < 1$$

конформно отображает  $\text{Im } t \geq 0$  на область изменения комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры отображения.

Предваряя постановку краевой задачи для аналитической функции  $\xi = \ln(dw/dz)$ , введем ряд обозначений. Пусть  $\nu$  и  $\theta$  — модуль скорости и угол ее наклона к некоторым образом заданной оси  $x$  (так что  $\xi = \ln \nu - i\theta$ ),  $s$  — длина дуги контура, отсчитываемая по часовой стрелке,  $\eta(s)$  — угол наклона к оси  $x$  касательной к контуру, соответствующий обходу по часо-

вой стрелке,  $R$  — некоторый характерный размер контура,  $\kappa(s) > 0$  — безразмерная с его помощью локальная кривизна. Тогда на смоченной части контура выполняются соотношения

$$(1.3) \quad -\frac{\kappa}{R} = \frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta}{dt} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| / \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \eta' \frac{v}{|w'|}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $t$ . В рассматриваемом случае выпуклого контура  $\eta(s)$  — монотонно убывающая функция, имеющая тем самым обратную, что определяет функцию  $\kappa(\eta) = \kappa[s(\eta)]$ . Вместе с  $R$  она однозначно задает геометрию контура и его ориентацию относительно оси  $x$ . Будем предполагать, что  $\kappa(\eta)$  удовлетворяет условию Липшица, в частности ограничена

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \kappa(\eta) &\leq \kappa_m, \\ |\kappa(\eta_1) - \kappa(\eta_2)| &\leq \\ &\leq \kappa_* |\eta_1 - \eta_2| \end{aligned}$$

Учитывая принятое на свободной границе равенство  $v=1$ , задаваясь некоторым значением  $\theta_\infty$  начального направления струи и принимая во внимание (1.3), получим граничные условия для  $\zeta(t)$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \ln v = 0 \quad (|t| > 1), \\ \theta(\infty) = \theta_\infty \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \frac{\eta'(t)}{\kappa[\eta(t)]} = -\frac{1}{R} \frac{|w'(t)|}{v(t)} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \theta = \eta - \pi \quad (-1 \leq t < \alpha), \\ \theta = \eta \quad (\alpha < t \leq 1) \end{aligned}$$

Ограниченное в точках  $t = \pm 1$  решение данной смешанной краевой задачи строится с помощью функции

$$G(t) = ig(t)\zeta(t), \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

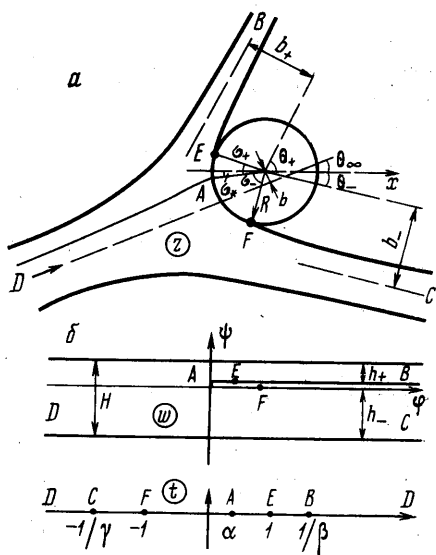
которая аналитична в  $\text{Im } t > 0$ , на границе имеет интегрируемые особенности,  $G(\infty) = 0$ ,  $\text{Re } G = 0$  при  $t > 1$  и  $t < -1$ . Тогда по формуле Сохоцкого [6] для граничных значений  $G$  имеем

$$(1.8) \quad \text{Im } G(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{Re } G(\tau) d\tau}{t - \tau} \quad (t \in (-\infty, \infty))$$

в частности

$$(1.9) \quad \ln v(t) = \frac{1}{\pi g(t)} \int_{-1}^1 \frac{\theta(\tau) g(\tau) d\tau}{t - \tau} \quad (t \in [-1, 1])$$

Уравнения (1.6), (1.7) и (1.9), дополненные условием вида  $\eta(\alpha) = \eta_*$ , составляют для  $\eta(t)$  на  $[-1, 1]$  интегродифференциальную задачу Коши типа Вилля [1, 2], соответствующую поставленной краевой задаче для  $\zeta$ .



При этом условие  $\eta(\alpha) = \eta_*$  заменяет условие (1.5). Связь между параметрами  $\theta_*$  и  $\eta_*$  обсуждается ниже.

Интегрирование (1.6) после разделения переменных дает

$$(1.10) \quad f(\eta) \equiv \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d\xi}{\kappa(\xi)} = -\frac{1}{R} \int_{\alpha}^t \frac{|w'(\tau)| d\tau}{v(\tau)} \equiv Pv(t)$$

В силу положительности  $\kappa$  функция  $f(\eta)$  строго монотонна, значит имеет обратную  $f^{-1}$ , так что  $\eta(t) = f^{-1}Pv(t)$ . Тем самым (1.10) вместе с (1.7) определяет интегральный оператор

$$(1.11) \quad \theta(t) = Tv(t)$$

зависящий от  $\eta_*$  как от параметра. Таким образом, в случае выпуклого контура задача приводится к интегральному уравнению (1.9), (1.11) относительно  $v(t)$  на  $[-1, 1]$ . Интегрирование (1.9) по частям с учетом соотношений

$$(1.12) \quad \theta' = \eta'(t \in [-1, \alpha), t \in (\alpha, 1]), \theta(\alpha+0) - \theta(\alpha-0) = \pi$$

$$\frac{1}{g(t)} \int \frac{q(\tau) d\tau}{t-\tau} \equiv Q(\tau, t) = \ln \frac{q(\tau, t)}{|t-\tau|}$$

$$q(\tau, t) = 1 - t\tau + \sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}$$

$$Q(\pm 1, t) = Q(\tau, \pm 1) = 0, \quad Q(\tau, t) \geq 0 \quad (t, \tau \in [-1, 1])$$

приводит его к более удобной для анализа форме

$$(1.13) \quad \ln v(t) = -Q(\alpha, t) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^t Q(\tau, t) \eta'(\tau) d\tau$$

Введя новую неизвестную функцию

$$(1.14) \quad \omega(t) = \ln \frac{v(t)p(t)}{|t-\alpha|}, \quad p(t) \equiv q(\alpha, t) > 0$$

и подставив  $\eta'$  из (1.6), окончательно приходим к интегральному уравнению для  $\omega$  на  $[-1, 1]$

$$(1.15) \quad \omega(t) = a\beta\gamma \int_{-1}^t Q(\tau, t) p(\tau) v(\tau) \kappa(\tau) e^{-a(\tau)} d\tau \quad (\omega = A\omega)$$

$$a = \frac{H}{R}, \quad v(t) = \frac{1}{[\pi^2(1-\beta t)(1+\gamma t)]} > 0$$

где  $\kappa(t)$  связано с  $\omega(t)$  интегральным оператором. Переписав (1.10) с помощью введенных обозначений

$$(1.16) \quad f(\eta) \equiv \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d\xi}{\kappa(\xi)} = -\pi a\beta\gamma \int_{\alpha}^t p v e^{-a} d\tau \equiv \Pi\omega(t)$$

получим

$$\eta(t) = f^{-1}\Pi\omega(t), \quad \kappa(t) = \kappa[\eta(t)]$$

**Теорема 1.** Пусть оператор  $A$  соответствует правой части (1.15), оператор  $A_m$  получается из него заменой  $\kappa(\tau) \rightarrow \kappa_m$ . Пусть далее  $\omega_m = A_m 0$  и определено множество  $S\{\omega : 0 \leq \omega \leq \omega_m\}$  из пространства непрерывных функций  $C[-1, 1]$  с нормой  $\|\omega\| = \max |\omega(t)|$ . Тогда при любых допустимых значениях параметров уравнение (1.15) имеет в  $S$  по крайней мере одно решение; условие

$$(1.17) \quad K = a\beta\gamma\kappa_m \|pM\| (1 + \pi a\beta\gamma N \kappa_*) < 1$$

$$M(t) = \int_{-1}^t Qv \, d\tau, \quad N = \int_{-1}^1 p v \, d\tau$$

гарантирует его единственность.

*Доказательство.* Полагаем всюду, что соблюдены условия (1.2) и (1.4). Легко видеть, что для ограниченной  $\omega$  функция  $u = A\omega \in C$ , причем  $u \geq 0$  в силу неотрицательности  $Q$ ,  $p$  и  $v$ . Тогда

$$(1.18) \quad 0 < \|Au\| \leq \|A_m u\| \leq \|A_m 0\| = \|\omega_m\|$$

откуда следует, что любое возможное решение (1.15) лежит в  $S$ , а также что  $A$  отображает  $S$  в себя. Множество  $S$  замкнуто в  $C$ , выпукло и, очевидно, ограничено. Покажем, что  $A$  вполне непрерывен в  $S$ . Пусть  $\omega_i \in S$ ,  $\eta_i = i^{-1} \Pi \omega_i$ ,  $\kappa_i = \kappa(\eta_i)$  для  $i=1, 2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|A\omega_1 - A\omega_2\| &\leq a\beta\gamma \|pM\| \|\kappa_1 e^{-\omega_1} - \kappa_2 e^{-\omega_2}\| \leq \\ &\leq a\beta\gamma \|pM\| (\kappa_m \|\omega_1 - \omega_2\| + \|\kappa_1 - \kappa_2\|) \end{aligned}$$

причем в силу (1.4) и (1.16)

$$\begin{aligned} \|\kappa_1 - \kappa_2\| &\leq \kappa_* \|\eta_1 - \eta_2\| \leq \kappa_* \max \left| 1 - \frac{df}{d\eta} \right| \|\Pi\omega_1 - \Pi\omega_2\| \leq \\ &\leq \kappa_* \kappa_m \pi a\beta\gamma N \|\omega_1 - \omega_2\| \end{aligned}$$

так что

$$(1.19) \quad \|A\omega_1 - A\omega_2\| \leq K \|\omega_1 - \omega_2\|, \quad K < \infty$$

где  $K$  дано в (1.17). Таким образом,  $A$  непрерывен в  $S$ . Для любого  $S' \subset S$  множество  $AS'$  равномерно ограничено, что очевидно, и равномерно непрерывно. Последнее следует из оценки

$$\begin{aligned} |u(t_1) - u(t_2)| &\leq a\beta\gamma \kappa_m \|pv\| \|l(t_1) - l(t_2)\| \\ l(t) &= \int_{-1}^t Q(\tau, t) \, d\tau, \quad \|pv\| < \infty \end{aligned}$$

и непрерывности  $l(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ . По критерию Арцела тогда  $AS'$  компактно и  $A$  вполне непрерывен в  $S$  [7].

Заключаем теперь, что удовлетворены условия принципа неподвижной точки Шаудера [7], так что (1.15) разрешимо в  $S$ . Достаточное условие единственности решения  $K < 1$  следует из (1.19) — отображение  $A\omega$  является тогда сжатием. При этом решение может быть получено методом простых итераций [7].

$$(1.20) \quad \omega_{(n+1)} = A\omega_{(n)}, \quad \omega_{(0)} \in S$$

Для значения  $K$  можно привести ряд более или менее точных оценок, в каждую из которых существенным образом входит комплекс  $a\beta\gamma$ . Вычисление соответствующих интегралов дает

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{1}{\pi(\beta+\gamma)\sqrt{1-t^2}} \left( \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{1+\gamma t} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta t} \right) \\ M(t) &= \frac{1}{\pi(\beta+\gamma)} \left( \arcsin \frac{\gamma+t}{1+\gamma t} + \arcsin \frac{\beta-t}{1-\beta t} \right) \end{aligned}$$

так что

$$\|M\| = M(t_0) = \frac{2}{\pi(\beta+\gamma)} \arcsin \frac{g(\beta, \gamma)}{\beta+\gamma} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left( t_0 = \frac{\sqrt{1-\gamma^2} - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{1-\gamma^2} + \gamma\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

Далее имеем

$$\|p\| \leq 2, \quad N \leq \frac{\|p\|}{\pi^2(\beta+\gamma)} \ln \frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1-\beta)(1-\gamma)}$$

откуда находим оценку для  $K$  в явном виде

$$K \leq a\beta\gamma\kappa_m \left[ 1 + \frac{a\beta\gamma\kappa_*}{\pi(\beta+\gamma)} \ln \frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1-\beta)(1-\gamma)} \right]$$

В частности, при обтекании круга радиуса  $R$ , когда  $\kappa_m=1$ ,  $\kappa_*=0$ , достаточное условие единственности решения и применимости метода (1.20) его нахождения принимает вид  $a\beta\gamma < 1$ .

Возвращаемся к общей схеме решения задачи. После получения  $\omega(t)$  из уравнения (1.15) находим  $\eta(t) = f^{-1}\Pi\omega(t)$ , затем  $\theta(t)$  и  $\operatorname{Re} G(t) = \theta(t)g(t)$  на  $[-1, 1]$ . Функция  $G(t)$ , а с ней и  $\zeta(t)$  восстанавливаются теперь всюду в  $\operatorname{Im} t \geq 0$  с помощью интеграла Шварца [6]

$$(1.21) \quad G(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Re} G(\tau) d\tau}{t-\tau} \quad (\operatorname{Im} t \geq 0)$$

В физическую плоскость  $z$  переходим по формуле

$$(1.22) \quad z'(t) = w'(t) \exp[-\zeta(t)]$$

Построенное таким образом решение зависит помимо априорно заданных  $a$  и  $\kappa(\eta)$  от четырех формальных параметров ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\eta_*$ ). Два из них, например  $\eta_*$  и  $\alpha$ , определяются заданием угловой ориентации контура относительно начального образа струи (посредством параметра  $\theta_\infty$ ) и некоторого параметра, характеризующего прицепное расстояние натекания. Два оставшихся параметра ( $\beta$  и  $\gamma$ ) являются свободными, чему соответствует неопределенность положения точек отрыва в потенциальной модели. В дальнейшем будем полагать, что они определяются условием «гладкого» отрыва Бриллюэна — Вилля [1, 2].

Дифференцируя (1.15) по  $t$  под знаком интеграла, находим

$$(1.23) \quad \omega' \sim -\frac{B_+}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \rightarrow 1-0), \quad \omega' \sim \frac{B_-}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \rightarrow -1+0)$$

$$0 < B_\pm = a\beta\gamma \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1\pm\tau}{1\mp\tau}} p v \kappa e^{-\omega} d\tau$$

и тогда по определению  $\omega$  (1.14)

$$v'(t) \sim \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - B_+ \right) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \text{const} \quad (t \rightarrow 1-0)$$

$$v'(t) \sim \left( B_- - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \text{const} \quad (t \rightarrow -1+0)$$

В силу аналитичности  $\zeta = \ln v - i\theta$  также ведет себя при  $t \rightarrow 1+0$  и  $t \rightarrow -1-0$  функция  $\theta'(t)$ , а вместе с ней и кривизна свободных границ в точках отрыва. Условия гладкости

$$B_+ = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, \quad B_- = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

накладывают на параметры недостающие две связи, т. е. замыкают потенциальную модель обтекания.

2. Пусть обтекаемый контур является кругом радиуса  $R$ , так что  $\kappa(\eta) = 1$ . В этом случае исходное уравнение (1.15), принимающее вид

$$(2.1) \quad \omega(t) = \alpha\beta\gamma \int_{-1}^1 Q p v e^{-\alpha} d\tau$$

не содержит параметра  $\eta_*$ , а в (1.16)  $f(\eta) = \eta - \eta_*$ , и значит функция  $\eta(t) = \eta_* + \Pi\omega(t)$  зависит от  $\eta_*$  линейно. Соответственно этому  $\zeta(t)$  всюду в  $\text{Im } t \geq 0$  связана с  $\eta_*$  также линейно. Тогда области течений, отвечающих различным значениям  $\eta_*$  (или  $\theta_\infty$ ), изометричны, и течения могут быть отождествлены. Таким образом, решение данной задачи определяется двумя независимыми параметрами, за которые примем  $a = H/R$  и  $\alpha$ . Параметр  $\alpha$  непосредственно связан с прицельным расстоянием  $b$ , которое определим как расстояние от центра обтекаемого круга до начальной оси струи. Из соображений симметрии ясно, что двум значениям  $\alpha$ , отличающимся только знаком, соответствуют течения, области которых переходят друг в друга при отображении плоскости течения относительно начальной оси струи (при этом  $b(\alpha) = b(-\alpha)$ ), так что можно ограничиться рассмотрением только положительных значений  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha < 1$ .

Пусть начало координат помещено в центр круга,  $\sigma$  означает угол на окружности, отсчитываемый от отрицательного направления оси  $x$  по часовой стрелке, так что  $\sigma = \pi/2 - \eta$ . В соответствии с (1.16)

$$(2.2) \quad \sigma(t) = \sigma_* + \alpha\beta\gamma \int_{\alpha}^1 p v e^{-\alpha} d\tau, \quad \sigma_* = \sigma(\alpha)$$

Параметр  $\sigma_*$  задает положение критической точки (при заданном  $\theta_\infty$ ). Положение точек отрыва характеризуется параметрами

$$(2.3) \quad \sigma_+ = \sigma(1) - \sigma_*, \quad \sigma_- = \sigma_* - \sigma(-1) \quad (\sigma_\pm > 0)$$

Геометрия струи восстанавливается с помощью (1.22) после нахождения  $\theta(t)$  на участках  $\text{Im } t = 0$ , отвечающих свободным границам. Аналогично выводу (1.13) и (1.15) находим из (1.8) при  $t > 1$  и  $t < -1$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \pi\theta(t) &= \theta(1)J(1, t) - \theta(-1)J(-1, t) - \pi J(\alpha, t) - \int_{-1}^1 J(\tau, t)\eta'(\tau) d\tau \\ \theta(t) &= -\sigma_* + \frac{1}{2}(\sigma_- - \sigma_+) - J(\alpha, t) + \alpha\beta\gamma \int_{-1}^1 J p v e^{-\alpha} d\tau \end{aligned}$$

$$J(\tau, t) = \arcsin \frac{t\tau - 1}{t - \tau}$$

Динамические характеристики обтекания — силу сопротивления  $X$ , действующую на единицу длины цилиндра вдоль начальной оси струи, и нормальную к ней подъемную силу  $Y$  — легко найти из уравнений сохранения соответствующих проекций импульса

$$(2.5) \quad \begin{aligned} X &= 1 - (h_+/H) \cos(\theta_+ - \theta_\infty) - (h_-/H) \cos(\theta_\infty - \theta_-) \\ Y &= (h_-/H) \sin(\theta_\infty - \theta_-) - (h_+/H) \sin(\theta_+ - \theta_\infty) \end{aligned}$$

где  $h_\pm$  — ширина ветвей струи,  $\theta_+ = \theta(1/\beta)$ ,  $\theta_- = \theta(-1/\gamma)$  — углы их наклона к оси  $x$ . Силы отнесены к произведению  $H$  на плотность жидкости и квадрат начальной скорости, положительному значению  $Y$  соответствует сила, направленная от оси струи. Интегрируя (1.1) в окрестностях точек  $t = 1/\beta$  и  $t = -1/\gamma$ , получим

$$(2.6) \quad \frac{h_+}{H} = \gamma \frac{1 - \beta\alpha}{\beta + \gamma}, \quad \frac{h_-}{H} = \beta \frac{1 + \gamma\alpha}{\beta + \gamma}$$

Для нахождения прицельного расстояния  $b$  воспользуемся уравнением сохранения момента импульса струи относительно центра круга

$$(2.7) \quad bH = b_- h_- - b_+ h_+$$

где  $b_\pm$  — прицельные расстояния ветвей струи, для которых получим в силу (1.22) и элементарных геометрических соображений

$$(2.8) \quad \begin{aligned} b_+ &= \frac{1}{2} h_+ + R \cos[\theta(1) - \theta_+] + \int_1^{1/\beta} \sin[\theta(t) - \theta_+] w'(t) dt \\ b_- &= \frac{1}{2} h_- + R \cos[\theta_- - \theta(-1)] + \int_{-1/\gamma}^{-1} \sin[\theta_- - \theta(t)] w'(t) dt \end{aligned}$$

Ниже рассматривается зависимость введенных характеристик течения от параметров  $a$  и  $\alpha$ . Положив в (1.20)  $\omega_{(0)} = 0$ , получим представление решения уравнения (2.1) в виде ряда по степеням  $(a\beta\gamma)$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \omega &= \sum_{h=1}^{\infty} (a\beta\gamma)^h \chi_h(t; \alpha, \beta, \gamma) \\ \chi_1 &= \int_{-1}^1 Q p v d\tau, \quad \chi_2 = - \int_{-1}^1 Q p v \chi_1 d\tau, \quad \chi_3 = \int_{-1}^1 Q p v (\frac{1}{2} \chi_1^2 - \chi_2) d\tau, \dots \end{aligned}$$

с не менее чем единичным радиусом сходимости. Допущение малости

$$(2.10) \quad a\beta\gamma \ll 1$$

позволяет получить аналитическое представление решения задачи. Тогда в первом приближении можно ограничиться первым членом ряда (2.9),

а в (1.23), (2.2) и (2.4) положить  $\omega=0$

$$(2.11) \quad B_{\pm} = a\beta\gamma \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 \pm \tau}{1 \mp \tau}} p v d\tau$$

$$(2.12) \quad \sigma(t) = \sigma_* + \pi a [E(t) - E(\alpha)] \left( E(t) = \beta\gamma \int p v dt \right)$$

$$(2.13) \quad \theta(t) = -\sigma_* + 1/2(\sigma_- - \sigma_+) - J(\alpha, t) + a\beta\gamma \int_{-1}^1 J p v d\tau$$

Вычисление соответствующих интегралов дает

$$(2.14) \quad E(t) = \sqrt{1-\alpha^2} \operatorname{arsin} t + \\ + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\beta+\gamma} \left[ \gamma \sqrt{1-\beta^2} \operatorname{arsin} \frac{\beta-t}{1-\beta t} - \beta \sqrt{1-\gamma^2} \operatorname{arsin} \frac{\gamma+t}{1+\gamma t} \right] + \\ + \frac{1}{\beta+\gamma} [\beta(\gamma+\alpha) \ln(1+\gamma t) - \gamma(\beta-\alpha) \ln(1-\beta t)] + \text{const}$$

$$(2.15) \quad B_+ = \frac{a}{\pi} \left\{ \alpha + \frac{1}{\beta+\gamma} \left[ \gamma(\beta-\alpha) \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \beta(\gamma+\alpha) \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\pi(\beta-\gamma)} \left[ \gamma(1+\beta) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \beta(1-\gamma) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right] \right\} \\ B_-(\alpha, \beta, \gamma) = B_+(-\alpha, \gamma, \beta)$$

**Теорема 2.** При любых значениях  $\alpha \in [0, 1)$  и  $a < \infty$  система уравнений гладкого отрыва

$$(2.16) \quad B_+(a, \alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, \quad B_-(a, \alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

разрешима в квадрате  $D\{\beta, \gamma \in (0, 1)\}$ . Для достаточно малых  $a$ :  $a < a_0(\alpha)$ , решение единственно. Функция  $a_0(\alpha)$  ограничена снизу:  $a_0(\alpha) \geq a_* > 0$ .

*Доказательство.* Полагаем сначала значения  $a$  и  $\alpha$  фиксированными. Функции  $B_{\pm}(\beta, \gamma)$  дифференцируемы в  $D$  и  $\partial B_{\pm}/\partial \beta > 0$ ,  $\partial B_{\pm}/\partial \gamma > 0$ , что легко видеть из (2.11). В частности, при  $\gamma = \text{const}$   $B_+$  монотонно возрастает по  $\beta$ , причем  $B_+ \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$  и  $B_+ \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow 1$ . Значит существует значение  $\beta$ , притом единственное, удовлетворяющее при данном  $\gamma$  первому уравнению системы (2.16), которое тем самым определяет однозначную функцию  $\beta = f(\gamma)$ . Точно также второе уравнение определяет однозначную функцию  $\gamma = g(\beta)$ . Эти функции дифференцируемы и монотонно убывают, так как

$$-\infty < f' = -\frac{\partial B_+}{\partial \gamma} / \frac{\partial B_+}{\partial \beta} < 0, \quad -\infty < g' = -\frac{\partial B_-}{\partial \beta} / \frac{\partial B_-}{\partial \gamma} < 0$$

Легко видеть, что они отображают  $(0, 1)$  в себя

$$f(\gamma) \rightarrow 1 \quad (\gamma \rightarrow 0), \quad f(\gamma) \rightarrow \beta_0 \in (0, 1) \quad (\gamma \rightarrow 1)$$

$$g(\beta) \rightarrow 1 \quad (\beta \rightarrow 0), \quad g(\beta) \rightarrow \gamma_0 \in (0, 1) \quad (\beta \rightarrow 1)$$

Доопределим эти функции в точках 0, 1 их предельными значениями. Приходим теперь к уравнению

$$(2.17) \quad \beta = F(\beta) = f[g(\beta)]$$



с непрерывной и монотонно возрастающей функцией  $F$ , отображающей отрезок  $[0,1]$  в себя

$$F(0) = f(1) = \beta_0, \quad F(1) = f(\gamma_0) = \beta_1 \in (\beta_0, 1)$$

По теореме о неподвижной точке уравнение (2.17) имеет по крайней мере одно решение  $\beta_* \in [\beta_0, \beta_1]$ . Соответственно система (2.16) имеет решение  $(\beta_*, \gamma_* = g(\beta_*))$ ,  $\gamma_* \in [\gamma_2, \gamma_1]$ , причем

$$\gamma_0 < \gamma_2 = g(\beta_1) < \gamma_1 = g(\beta_0) < 1$$

Пусть теперь  $\alpha$  фиксировано,  $a \rightarrow 0$ . Как следует из (2.15) и (2.16), тогда  $\beta_0, \gamma_0 \rightarrow 1$ . Вместе с ними стремятся к единице и  $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ , а производные  $g'$  и  $f'$  стремятся к нулю при  $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$  и  $\gamma \in [\gamma_2, \gamma_1]$ . Но тогда  $F' = f'g' \rightarrow 0$  на  $[\beta_0, \beta_1]$  при  $a \rightarrow 0$  и, следовательно, при достаточно малых  $a$   $F' < 1$ , т. е. отображение  $F(\beta)$  является сжатием на  $[\beta_0, \beta_1]$ . Тем самым уравнение (2.17), а с ним и система (2.16) разрешимы однозначно.

Для доказательства последнего утверждения теоремы, очевидно, достаточно показать, что система (2.16) однозначно разрешима при  $\alpha \rightarrow 1$  и любом заданном  $a$ . Всякое решение (2.17) лежит в отрезке  $[\beta_2, \beta_1]$ , где  $\beta_2 = f(\gamma_1)$ ; обозначим еще  $\gamma_3 = g(\beta_2)$ . Пусть  $\alpha = 1 - \varepsilon$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Из (2.15), (2.16) находим тогда  $1 - \beta_0 \sim \varepsilon^3$ ,  $\gamma_0 \sim \varepsilon^{1/2}$  и далее  $1 - \beta_1 \sim 1 - \beta_2 \sim \varepsilon^4$ ,  $\gamma_2 \sim \gamma_3 \sim \varepsilon^{1/2}$ . Значит в прямоугольнике  $\{\beta \in [\beta_2, \beta_1], \gamma \in [\gamma_2, \gamma_3]\}$ ,  $\partial B_+ / \partial \beta \sim \varepsilon^{-3}$ ,  $\partial B_+ / \partial \gamma \sim \varepsilon^{-1}$ ,  $\partial B_- / \partial \beta \sim \varepsilon^{1/2}$  и  $\partial B_- / \partial \gamma \sim 1$ . Следовательно,  $F' \sim \varepsilon^{3/2} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 1$  на  $[\beta_2, \beta_1]$ , что завершает доказательство.

Предполагая струю достаточно тонкой ( $a \ll 1$ ), рассмотрим случай слабоасимметричного (в частности, симметричного) обтекания, которому отвечают значения  $\alpha \ll 1$ . Допустив, что соответствующие условию гладкого отрыва значения  $\beta$  и  $\gamma$  близки к единице, получим из (2.15) и (2.16)

$$\beta = 1 - \varepsilon_0(1 - 2\alpha), \quad \gamma = 1 - \varepsilon_0(1 + 2\alpha), \quad \varepsilon_0 = 1/2(a/\pi)^2$$

Для значений углов отрыва и ширины ветвей струи получаем теперь из (2.6), (2.12) и (2.14)

$$(2.18) \quad h_+/H = 1/2(1 - \alpha - \alpha\varepsilon_0), \quad h_-/H = 1/2(1 + \alpha + \alpha\varepsilon_0)$$

$$(2.19) \quad \sigma_+ = (1 - \alpha)\sigma_0, \quad \sigma_- = (1 + \alpha)\sigma_0, \quad \sigma_0 = a/\pi \ln(\pi/a)$$

В этих формулах разложения по малым параметрам  $a$  и  $\alpha$ , как и в дальнейших, сохранены главные и первые перекрестные члены. С целью упрощения вида формул порядок отброшенных членов мы не указываем. Примем, что начальное направление струи соответствует оси  $x$ , т. е.  $\theta_\infty = 0$ . Воспользовавшись значением следующего интеграла

$$\int_{-1}^1 \arcsin t \frac{t dt}{1 - \beta^2 t^2} \approx \pi \ln \frac{1}{\gamma(1 - \beta^2)} \quad (1 - \beta \ll 1)$$

получим из (2.13) при  $t = \infty$

$$\sigma_* = -\alpha(1 - 2\sigma_0) \quad (\theta_\infty = 0)$$

Это условие вместе с (2.3) и (2.19) дает для положения точек отрыва

$$\sigma(1) = \sigma_0 - \alpha(1 - \sigma_0), \quad \sigma(-1) = -[\sigma_0 + \alpha(1 - \sigma_0)]$$

Вычисление интеграла в (2.13) при  $t = \pm 1$ ,  $1/\beta$ ,  $-1/\gamma$  показывает, что  $\theta_\pm - \theta(\pm 1) = O(a)$ . Принимая во внимание соотношения  $\theta(\pm 1) = \pm \pi/2 - \sigma(\pm 1)$ , получим для значений углов отклонения ветвей струи

$$\theta_+ = \pi/2 - \sigma_0 + \alpha(1 - \sigma_0), \quad \theta_- = -\pi/2 + \sigma_0 + \alpha(1 - \sigma_0)$$

Подставив эти выражения при  $\theta_\infty = 0$  в (2.5), с учетом (2.18) найдем

$$(2.20) \quad Y = \alpha(1 - \sigma_0), \quad X = 1 - \sigma_0 - \alpha^2(1 - \sigma_0)$$

В соответствии с (2.7), (2.8) устанавливаем связь между формальным параметром  $\alpha$  и прицельным расстоянием  $b$

$$b/R = \alpha[1 + O(a)] + O(\alpha^2)$$

Симметричному ( $b=0$ ) обтеканию отвечает  $\alpha=0$ . Члены, зависящие от  $\alpha$  в приведенных выше формулах, описывают поправки, связанные с асимметрией течения.

Для сравнения приведем соответствующие формулы классической задачи о натекании струи на плоскость, нормаль которой составляет угол  $\alpha \ll 1$  с осью струи

$$\frac{h_+}{H} = \frac{1}{2}(1-\alpha), \quad \frac{h_-}{H} = \frac{1}{2}(1+\alpha), \quad \theta_+ = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$\theta_- = -\frac{\pi}{2} + \alpha, \quad Y = \alpha, \quad X = 1 - \alpha^2$$

Рассмотрим теперь случай сильноасимметричного обтекания. Будем полагать  $\alpha \rightarrow 1$  и получим асимптотические формулы зависимости параметров течения от  $\alpha$  при произвольном  $a$ , не обязательно малом. Пусть  $\alpha = 1 - \varepsilon$ ,  $\beta = 1 - \delta$ . Предположив, что  $\delta \ll \varepsilon \ll \gamma \ll 1$ , получим из (2.15) и (2.16)

$$(2.21) \quad B_+ = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} \frac{\gamma \varepsilon}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}, \quad B_- = \frac{a\gamma}{\pi} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

откуда

$$(2.22) \quad \delta = \frac{1}{2}\varepsilon^4, \quad \gamma = \pi/a\sqrt{1/2}\varepsilon$$

Условия (2.21) будут удовлетворены, если

$$(2.23) \quad \sqrt{\varepsilon} \ll \min(a, 1/a)$$

При этом (2.10) выполняется автоматически, так что представление решения в первом приближении формулами (2.11)–(2.13) справедливо независимо от ширины струи  $a$ . Требуется только, чтобы  $\alpha$  было достаточно близко к единице, а именно выполнялось (2.23).

Из (2.6), (2.12) и (2.14) с учетом (2.22) получаем

$$(2.24) \quad \sigma_+ = \frac{3}{\sqrt{2}} \varepsilon^{3/2} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \sigma_- = \sqrt{2}\varepsilon, \quad \frac{h_+}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \varepsilon^{3/2}$$

Легко показать, что для входящего в (2.13) интеграла при значениях параметров (2.22) справедлива равномерная по  $t$  оценка

$$\int_{-1}^1 J_p \nu \, d\tau = \frac{1}{\pi} D(t) [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]$$

$$D = \sqrt{t^2 - 1} - t, \quad t \geq 1, \quad D = |t| - \sqrt{t^2 - 1}, \quad t \leq -1$$

что вместе с (2.24) приводит к формуле

$$\theta(t) = -\sigma_* + \sqrt{1/2}\varepsilon [1 + D(t)] - J(\alpha, t) \quad (t > 1, t < -1)$$

Положив  $\theta_\infty = 0$ , получим при  $t = \infty$   $\sigma_* = -\pi/2 + 3\sqrt{1/2}\varepsilon$ , после чего найдем

$$\theta(1) = \pi - 3\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon, \quad \theta(-1) = -\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon$$

$$\theta_+ = \theta(1) - \sqrt{2}\varepsilon^3, \quad \theta_- = -\frac{3\pi}{4a}\varepsilon$$

Подстановка этих значений в (2.5) дает

$$(2.25) \quad Y = \frac{3\pi}{4a}\varepsilon, \quad X = \frac{\sqrt{2}\pi}{a}\varepsilon$$

Вычисления по формулам (2.7), (2.8) с учетом полученных результатов приводят к асимптотической зависимости  $b$  от  $\varepsilon$

$$(2.26) \quad b/R - (1 + 1/2a) = -3/8\varepsilon \ln 1/\varepsilon$$

откуда следует

**Теорема 3.** Для любого данного  $a$  при  $\alpha \rightarrow 1$  и соблюдении условий гладкого отрыва  $b/R$  стремится снизу к значению  $1+1/2a$ , которому соответствует внешнее касание контура с начальным образом струи.

В области промежуточных значений  $\alpha$  задача исследовалась численно (при  $a \ll 1$ ). Параметры  $\beta(\alpha)$  и  $\gamma(\alpha)$  определялись из системы (2.15), (2.16) методом двумерных секущих. В качестве начальных приближений для  $\beta$  и  $\gamma$  брались их значения на предыдущем шаге по  $\alpha$ , который монотонно менялся от 0 до  $1-a^4$ . Интеграл в (2.13) вычислялся по квадратурной формуле Гаусса с предварительной заменой переменной интегрирования  $d\xi = v(\tau) d\tau$ .

Численный анализ вместе с асимптотической формулой (2.26) показывает, что на всем интервале  $0 \leq \alpha < 1$  зависимость  $b(\alpha)$  является строго монотонной. В силу теорем 1, 2, 3 отсюда следует, что задача обтекания круга достаточно тонкой струей при выполнении условий Бриллюэна — Вилля однозначно разрешима для значений  $b$  из интервала  $0 \leq b < R+1/2H$  и неразрешима вне его. Последнее означает, что невозможен своеобразный гистерезис: контур нельзя «вытащить» из струи, сохранив предписанную топологию течения. Аналогичный результат справедлив и для задачи обтекания контура неразветвляющейся струей [4].

Из сравнения формул (2.19), (2.20) и (2.24), (2.25) видно, что зависимости одного из углов отрыва ( $\sigma_-$ ) и подъемной силы  $Y$  от  $\alpha$ , а следовательно, и от  $b$  немонотонны — имеют максимумы. В то же время, как показывает численное решение задачи, все остальные рассмотренные параметры течения зависят от  $b$  монотонно. Отметим еще, что при  $b \rightarrow R+1/2H$  угол отклонения  $\theta_+$  «брызговой» струйки стремится к значению  $\pi$ , т. е. к направлению, обратному начальному направлению струи, в то время как ее ширина  $h_+ \rightarrow 0$ . К нулю стремятся также длина смоченной дуги контура  $R(\sigma_+ + \sigma_-)$  и угол отклонения  $\theta_-$  основной ветви струи. Таким образом, предельным является тривиальное течение с внешним касанием контура и струи, которое, однако, не реализуется в схеме обтекания с предписанной нами топологией: в отличие от задачи обтекания гладкого контура неразветвляющейся струей [4] предельный переход к случаю касания ( $b \rightarrow R+1/2H$ ) является особым.

В заключение отметим, что при значениях  $b$ , близких к предельному, в рамках идеальной модели возможны два режима обтекания: с ветвлением и без него. Очень интересный, на наш взгляд, вопрос о реализации того или иного из них, затронутый в [4], требует специального анализа с привлечением более полных моделей движения жидкости.

Автор признателен М. А. Гольдштику за обсуждение работы.

Институт теплофизики  
СО АН СССР

Поступила 3 V 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
2. Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями. Гидромеханика, т. 5; М., Итоги науки ВИНТИ, 1971.
4. Ханин В. М. О потенциальной модели эффекта Коанда. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 4.
5. Гольдштик М. А., Ханин В. М. Взаимодействие цилиндра со свободной поверхностью и струей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
6. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М. «Наука», 1977.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.