

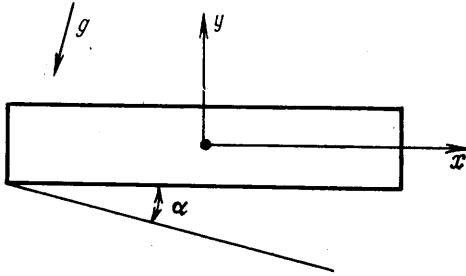
СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ В НАКЛОННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

А. Ю. ПИНЯГИН, А. Ф. ПШЕНИЧНИКОВ

(Пермь)

Изучается влияние наклона на распределение концентраций, вызванное термодиффузией, в полости прямоугольного сечения. Показано, что даже очень слабое конвективное движение, возникающее в полости при подогреве сверху, приводит к существенным возмущениям концентрационного поля.

В экспериментах по измерению коэффициента Соре часто применяются так называемые ячейки без конвекции. Обработка экспериментальных результатов про-



Фиг. 1

Рассмотрим прямоугольную полость высотой $2a$ и шириной $2qa$, заполненную жидкой бинарной смесью и наклоненную к горизонту под углом α (фиг. 1). Верхняя и нижняя границы поддерживаются при постоянных температурах T_0 и $-T_0$ соответственно. Боковые границы теплоизолированы. Возникающие в результате эффекта Соре перепады концентраций очень малы, поэтому будем пренебрегать потоком энергии, вызванным неоднородностью состава смеси. Коэффициент Соре считается постоянным. Система безразмерных уравнений, описывающих плоское движение бинарной смеси, с учетом сделанных предположений имеет вид [4, 5]

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right] =$$

$$= \Delta^2 \psi + Ra \sin \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} - N \frac{\partial C}{\partial y} \right) - Ra \cos \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x} - N \frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \Delta T$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{S} (\Delta C + \Delta T)$$

$$P = \nu / \chi, \quad S = \chi / D, \quad Ra = g \beta_1 a^3 T_0 / \nu \chi$$

$$N = \sigma C_0 (1 - C_0) \beta_2 / \beta_1, \quad \beta_2 = \rho^{-1} (\partial \rho / \partial c)$$

Здесь ψ — функция тока, T — температура, C — концентрация тяжелой компоненты, P — число Прандтля, S — число Шмидта, Ra — число Рэлея, N — безразмерный термодиффузионный параметр, β_1 , ν , χ , D — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии соответственно, σ — коэффициент Соре, C_0 — средняя по объему концентрация, ρ — плотность жидкости. В качестве единиц измерения длины, времени, функции тока, температуры и концентрации выбраны соответственно a , χ , a^2/χ , T_0 , $\sigma C_0 (1 - C_0) T_0$.

Если все границы полости твердые и непроницаемы для вещества, то граничные условия имеют вид

$$(1.2) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm q)$$

$$(1.3) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T = \pm 1, \quad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (y = \pm 1)$$

Стационарное решение системы уравнений (1.1) можно искать в виде рядов по числам Рэлея. Так как коэффициент диффузии для жидких растворов очень мал $S \gg 10^2$, то даже слабая конвекция, возникающая при малых числах Рэлея, способна существенно повлиять на распределение концентрации внутри полости. Ограничиваясь в связи с этим в (1.1) линейными по числу Рэлея членами, получаем ($\omega = Ra \sin \alpha (1+N)$)

$$(1.4) \quad \Delta^2 \psi = \omega = 0, \quad \partial \psi / \partial x = -\Delta \theta = S \Delta f$$

$$T(x, y) = y + \theta(x, y), \quad f(x, y) = C(x, y) + T(x, y)$$

Уравнение (1.4) допускает аналитическое решение, если положить свободными какие-либо две противоположные границы. Пусть свободными являются боковые границы. В этом случае вместо (1.2) для функции тока можно написать

$$\psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 = 0 \quad (x = \pm q)$$

Граничные условия для температуры и концентрации остаются прежними. Решение уравнений (1.4) имеет вид

$$(1.5) \quad \psi = -\frac{2\omega}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(\gamma_m x)}{\gamma_m^5} [1 + B_m \operatorname{ch}(\gamma_m y) + C_m y \operatorname{sh}(\gamma_m y)]$$

$$(1.6) \quad \theta = \frac{\omega}{2q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(\gamma_m x)}{\gamma_m^4} [(2\gamma_m B_m -$$

$$-C_m) y \operatorname{sh}(\gamma_m y) + \gamma_m C_m y^2 \operatorname{ch}(\gamma_m y) + D_m \operatorname{ch}(\gamma_m y) - 4]$$

$$(1.7) \quad f = \frac{S\omega}{2q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(\gamma_m x)}{\gamma_m^6} [(2\gamma_m B_m - C_m) y \operatorname{sh}(\gamma_m y) +$$

$$+ A_m \operatorname{ch}(\gamma_m y) + \gamma_m C_m y^2 \operatorname{ch}(\gamma_m y) - 4]$$

$$\gamma_m = \frac{2m+1}{2q} \pi, \quad C_m = \frac{\gamma_m \operatorname{sh}(\gamma_m)}{\gamma_m + \operatorname{sh}(\gamma_m) \operatorname{ch}(\gamma_m)}$$

$$A_m = \frac{\gamma_m^2 (3 + \operatorname{ch}(2\gamma_m)) + 3(\operatorname{ch}(2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh}(2\gamma_m) - 1)}{\operatorname{sh}(\gamma_m) [2\gamma_m + \operatorname{sh}(2\gamma_m)]}$$

$$B_m = \frac{\gamma_m \operatorname{ch}(\gamma_m) + \operatorname{sh}(\gamma_m)}{\gamma_m + \operatorname{sh}(\gamma_m) \operatorname{ch}(\gamma_m)}$$

$$D_m = \frac{4}{\operatorname{ch}(\gamma_m)} + \frac{\gamma_m \operatorname{th}(\gamma_m) [3 \operatorname{sh}(\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{ch}(\gamma_m)]}{\gamma_m + \operatorname{sh}(\gamma_m) \operatorname{ch}(\gamma_m)}$$

Все коэффициенты A_m, B_m, C_m, D_m экспоненциально уменьшаются при больших значениях m , и ряды (1.5)–(1.7) быстро сходятся.

Из (1.7) видно, что в линейном приближении по числу Рэлея профиль концентрации остается невозмущенным только для сечения $x=0$. Влияние конвекции проявляется в появлении составляющей градиента концентрации вдоль оси x . Так как для жидких растворов $S \gg 1$, то возмущение концентрации определяется величиной

$f(x, y)$. Функция тока и составляющая градиента концентрации вдоль оси x достигают максимальных значений ψ_0 и b_0 в центре полости.

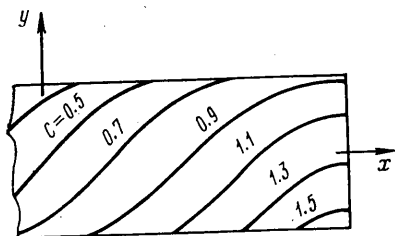
Полагая в (1.5), (1.7) $x=0, y=0$ и проводя суммирование, получим

$$(1.8) \quad \psi_0 = -1/24 \omega, \quad b_0 = -1/45 S \omega \quad (q \gg 1)$$

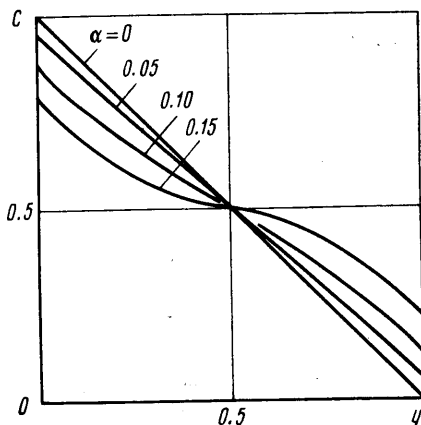
Формулы (1.8) должны, вообще говоря, давать результаты, мало отличающиеся от экспериментальных, так как граничные условия на боковых границах при $q \gg 1$ слабо влияют на амплитуду движения. В связи с этим заметим, что величина ψ_0 в (1.8) при $N=0$ совпадает с известным значением для наклонного плоского слоя с однокомпонентной жидкостью [5]. В другом предельном случае $q \ll 1$ (полость сильно вытянута вдоль оси y) имеем соответственно

$$\psi_0 = -5/24 q^4 \omega, \quad b_0 = -128/945 S q^5 \omega$$

Сравнение этих формул с (1.8) показывает, что при малых числах Рэлея и малых углах α интенсивность конвекции определяется произведением $Ra \alpha$. В полости,



Фиг. 2



Фиг. 3

вытянутой вдоль оси y , амплитуда движения может быть на несколько порядков меньше, чем в полости, вытянутой вдоль оси x . Видно, что наличие свободных боковых границ при $q \ll 1$ (или свободных верхней и нижней границ при $q \gg 1$) приводит к увеличению амплитуды движения в 5–6 раз.

Более полный учет реальных условий при $q \ll 1$ может быть проведен, если положить, что свободными являются нижняя и верхняя границы. Боковые границы твердые. Функция тока, возмущения температуры и концентрации при $q \ll 1$ описываются формулами, аналогичными (1.5)–(1.7). В частности, для максимального значения функции тока и возмущения концентрации f_0 имеем при $q \ll 1$

$$(1.9) \quad \psi_0 = 1/24 q^4 \omega, \quad f_0 = 1/45 S q^5 \omega$$

Для исследования конвективного движения при больших числах Рэлея использовались численные методы. В качестве переменных были выбраны функции тока ψ , вихрь скорости $\varphi = -\Delta\psi$, температура T и концентрации C . Система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) решалась методом конечных разностей. Для решения задач по свободной тепловой конвекции этот метод применялся, например, в [6, 7]. В области $-q \leq x \leq q, -1 \leq y \leq 1$ вводилась равномерная сетка

$$x_i = ih_1, \quad (i=0, 1, 2, \dots, M), \quad h_1 = q/M$$

$$y_k = kh_2, \quad (k=0, 1, 2, \dots, K), \quad h_2 = 1/K$$

и дискретный шаг по времени $\tau = h^2 / (4 + R\psi_0)$, где h – наименьший дискретный шаг по координате, R – параметр, определяемый экспериментально из условия устойчивости схемы. Большая часть вычислений проводилась при $M=15, K=15, R=1.2$. Пространственные производные заменялись конечными разностями. Использовалась явная схема. При составлении граничных условий для вихря применялись формулы Тома [8]. Решение уравнения Пуассона для функции тока проводилось методом последовательной нижней релаксации. Для экономии машинного времени изменялся масштаб времени при решении уравнения теплопроводности и диффузии. Контроль-

ные эксперименты показали, что изменение масштаба времени в этих уравнениях позволяет быстро получить стационарное решение и не влияет на конечные результаты.

Число Прандтля и величина термодиффузионного параметра выбирались применительно к водным растворам солей (для большинства водных растворов солей коэффициент Соре $\sigma = 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$). Все расчеты проведены для $P=6$, $N=0.1$ и $Ra > 0$ (подогрев сверху). Численное исследование подтвердило, что интенсивность конвективного движения при малых углах наклона увеличивается пропорционально $Ra \alpha$, если только $Ra \alpha \leq 60$. Структуры течений, полученных при разных числах Рэлея, но при одной и той же величине $Ra \alpha$ практически одинаковы. При $Ra \alpha > 60$ начинает формироваться пограничный слой и рост интенсивности движения замедляется. В частности, амплитудное значение функции тока увеличивается с ростом $Ra \alpha$ медленнее, чем по линейному закону.

Распределение концентрации в полости определяется величиной комплекса $Ra \alpha S$. Горизонтальная составляющая градиента концентрации увеличивается с ростом этого комплекса, достигая максимального значения при $Ra \alpha S = 10^2$, после чего начинает уменьшаться. Вертикальная составляющая градиента концентрации уменьшается монотонно. На фиг. 2 приведена картина линий равной концентрации для $q=4$, $Ra=3.0$, $\alpha=0.15$, $S=167$, т. е. для условий, близких к максимальному возмущению концентрации в сечении $y=0$. Как видно из фигуры, это возмущение может быть весьма значительным (безконвективному случаю при $\alpha=0$ соответствуют линии, параллельные оси x). На фиг. 3 приведены профили концентрации для сечения $x=0$ при тех же условиях, что и на фиг. 2, но для различных углов. При $Ra \alpha \approx 30$ вертикальная составляющая градиента концентрации уменьшается примерно на 5% по сравнению со случаем $\alpha=0$. При дальнейшем увеличении $Ra \alpha S$ отклонение от линейного распределения концентрации быстро увеличивается. Возмущения температуры оказались малыми для всех рассмотренных значений $Ra \alpha$. Так, при $Ra=3 \cdot 10^2$, $\alpha=0.15$ максимальное значение возмущения температуры $\theta=0.1$.

Уменьшение размера полости вдоль оси x приводит к резкому уменьшению амплитуды движения, что согласуется с результатами, полученными в [9]. Так, при $q=0.25$, $Ra=3.0$, $\alpha=0.15$ численное решение дает $\psi=7.8 \cdot 10^{-3}$, $f=1.4 \cdot 10^{-2}$, $T=8.6 \cdot 10^{-5}$. В случае $q=0.25$ максимальное значение функции тока растет пропорционально $Ra \sin \alpha$ по крайней мере до $Ra \sim 300$ и $\alpha=0.8$.

Несмотря на то что формулы (1.8) получены в предположении, что боковые границы свободные и $q \gg 1$, они дают удовлетворительное совпадение с численным решением, если $Ra \ll 400$, $q \geq 4$ и $\alpha < 0.1$. Так, при $q=4$ расхождение не превышает 10–15%. Формулы (1.9) оказываются справедливыми примерно с такой же степенью точности, для полости вытянутой вдоль оси y ($q \leq 0.25$), $\alpha < 0.8$ и $Ra < 400$.

В заключение авторы благодарят Г. З. Гершуни, Ю. К. Братухина и В. И. Чернатынского за обсуждение результатов и полезные замечания.

Поступило 20 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nachtigall K., Meyerhoff G.* Über die Thermodiffusion von Hochpolymeren. Z. Physik. Chemie, 1961, Bd 30, H 1/2.
2. *Velarde M. G., Schechter R. S.* Thermal diffusion and convective stability. 3. A critical survey of soret coefficient measurements. Chem. Phys. Letter, 1971, vol. 12, No. 2.
3. *Рабинович Г. Д., Бухилова М. А., Лепехина Ж. В.* Методы определения коэффициентов Соре. Инж.-физ. ж., 1975, т. 28, № 6.
4. *Шапошников И. Г.* К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. *Гершуни Г. З., Жуговицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. *Полежаев В. И.* Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. *Гершуни Г. З., Жуговицкий Е. М., Тарунин Е. Л.* Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
8. *Том А., Эйплт К.* Числовые расчеты полей в технике и физике. М.—Л., «Энергия», 1964.
9. *Catton J., Ayyaswamy P. S., Clever R. M.* Natural convection flow in a finite, rectangular slot arbitrarily oriented with respect to the gravity vector. Int. J. Heat Mass Transfer, 1974, vol. 17, No. 2.