УДК 532.546

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

Г. А. ВИРНОВСКИЙ

(Москва)

Большинство нефтяных пластов имеет слоистое строение, обусловленное особенностями процесса осадконакопления. В литературе можно найти многочисленные попытки оценить влияние слоистости на параметры переходного процесса в скважине при упругом режиме фильтрации. Рассматривались как случаи сообщающихся, так и случаи изолированных пропластков.

Исследование процесса восстановления давления в слоистом пласте с изолированными слоями [1, 2] показало, что в этом случае задача определения параметров слоистости по кривой восстановления давления в скважине является практически неразрешимой.

Представляет интерес построение более общей теории, допускающей рассмотрение обратных задач и для других моделей нестационарной фильтрации, в частности фильтрации многофазной жидкости.

1. В достаточно общем виде задачу определения параметров слоистого пласта, состоящего из несообщающихся пропластков, можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим многофазную фильтрацию в трехмерном слоистом пласте, состоящем из произвольного числа двумерных изолированных прослоев. Обозначим α_i, $i=1,\ldots,\nu$, параметры прослоя и предположим, что для вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}$ задано множество допустимых значений A. В качестве неизвестных параметров α_i могут быть выбраны, вообще говоря, любые характеристики пласта или пластовых флюидов, влияющие на гидродинамику. Предположим, что каждый прослой однороден в смысле постоянства вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$, а размерность $\boldsymbol{\alpha}$ и заданные краевые условия одинаковы для всех прослоев. Таким образом, течения во всех прослоях подобны и различаются лишь конечным набором констант.

Для суммарных расходов фаз справедливы выражения

$$q_j(x,t)=\int|\mathbf{w}_j(x,t;\boldsymbol{\alpha})|f(\boldsymbol{\alpha})\,d\boldsymbol{\alpha},\qquad j=1,\ldots,N \tag{1.1}$$

Здесь $x=\{x_1,\ x_2\}$ – вектор пространственных координат, t – время, q_j – суммарный расход j-й фазы, w_j – фазовые скорости, N – число фаз, $f(\boldsymbol{\alpha})$ – плотность распределения параметров $\boldsymbol{\alpha}$.

Так как $f(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}$ имеет смысл мощности пропластков с параметрами, принадлежащими многомерному интервалу $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}+d\boldsymbol{\alpha})$, то $f(\boldsymbol{\alpha})$ должна удовлетворять ограничениям

$$f(\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0,\qquad \int\limits_A f(\boldsymbol{\alpha})\,d\boldsymbol{\alpha}=H \tag{1.2}$$

Здесь H – суммарная мощность слоистого пласта.

Поскольку краевые условия заданы и одинаковы для всех пропластков (быть может, с точностью до констант, входящих в число компонент $\boldsymbol{\alpha}$), то скорости $\mathbf{w}_j(x,\ t;\ \boldsymbol{\alpha})$ могут быть найдены путем решения «прямой» задачи, т. е. путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих процесс фильтрации. Тогда в тех точках пласта, где суммарные расходы известны, соотношения (1.1) можно рассматривать как интегральные уравнения Фредгольма первого рода относительно неизвестной $f(\boldsymbol{\alpha})$.

В работе подвергнуты анализу случаи, когда неизвестна проницаемость. При этом ядра интегральных уравнений (1.1) приобретают свойство автомодельности и уравнения становятся симметричными: при заданных функциях $|\mathbf{w}_j|$ может быть определена плотность f и, наоборот, модули скоростей фильтрации $|\mathbf{w}_j|$ можно найти, если известна плотность f.

2. В простейшем случае двухфазная фильтрация в слоистом пласте описывается уравнениями

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{w}_1+m\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$$

$$
\mathbf{w}=-k\left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}+\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\right)\operatorname{grad}p,\qquad \mathbf{w}_1=\mathbf{w}\varphi(\sigma)
$$

(2.1)

$$
k=\frac{k_0(x,y)}{\alpha(z)},\qquad m=\frac{m_0(x,y)}{\beta(z)},\qquad w_z=0,\qquad x,y\in D
$$

Здесь σ – насыщенность; p – давление; $\mathbf{w}$ – суммарная скорость фильтрации; k_1, k_2 – относительные фазовые проницаемости; μ_1, μ_2 – вязкости; φ – функция Баклея – Леверетта; x, y – горизонтальные координаты; z – вертикальная координата; D – проекция области фильтрации на горизонтальную плоскость; t – время; k – проницаемость; m – пористость; $k_0(x, y)$, $m_0(x, y)$ – заданные функции; $\alpha(z)$, $\beta(z)$ – неизвестные параметры слоев.

Уравнения (2.1) можно представить в виде

(2.2)

$$
\frac{\partial}{\partial x}k_0\left(\frac{k_1}{\mu_1}+\frac{k_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_0\left(\frac{k_1}{\mu_1}+\frac{k_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial p}{\partial y}=0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}k_0\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_0\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial y}-m_0\frac{\partial\sigma}{\partial(\beta t/\alpha)}=0
$$

Если заданы начальные и граничные условия, не зависящие от z и t, то из уравнений (2.2) следует, что их решение представимо в виде $\sigma(x, y, z, t)=\sigma_0(x, y, \beta(z)t/\alpha(z))$, $p(x, y, z, t)=p_0(x, y, \beta(z)t/\alpha(z))$. (Здесь σ_0, p_0 – насыщенность и давление при фильтрации в «эталонном» пласте, т. е. в плоской области D с пористостью $m_0(x, y)$ и проницаемостью $k_0(x, y)$ при заданных краевых условиях). Так как на гидродинамику влияет лишь отношение β/α, а не каждый из параметров в отдельности, то, не ограничивая общности, положим $\beta(z)\equiv 1$, т. е. считаем, что пористость не зависит от z.

Обозначив $u_j(x, y, t)$ – модуль фазовой скорости в эталонном пласте, выпишем уравнения (1.1) для точки (x_0, y_0), соответствующей эксплуатационной скважине

(2.3)
$$
\int_0^\infty f(\alpha)\frac{1}{\alpha}u_j\left(x_0,y_0,\frac{t}{\alpha}\right)d\alpha=q_j(x_0,y_0,t),\qquad j=1,2
$$

В том случае, когда начальная насыщенность в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) не превышает насыщенности связанной воды, $u_1(x_0, y_0, t)=0$ при $t<t_0(x_0, y_0)$ ($t_0(x_0, y_0)$ – время достижения подвижной водой точки (x_0, y_0) в эталонном пласте). Поэтому для этого случая

(2.4)
$$
\int_0^\tau \frac{1}{\alpha}f(\alpha)v_1\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\alpha=g_1(\tau)
$$

(2.5)
$$
\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}f(\alpha)v\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\alpha=g(\tau)
$$

$$
\tau=t/t_0(x_0,y_0),\quad v_1(\tau)=u_1(x_0,y_0,\tau t_0),\quad g_1(\tau)=q_1(x_0,y_0,\tau t_0)
$$
$$
v(\tau)=u_1(x_0,y_0,\tau t_0)+u_2(x_0,y_0,\tau t_0)-[u_1(x_0,y_0,0)+u_2(x_0,y_0,0)]
$$
$$
g(\tau)=q_1(x_0,y_0,\tau t_0)+q_2(x_0,y_0,\tau t_0)-[q_1(x_0,y_0,0)+q_2(x_0,y_0,0)]
$$

К уравнению, аналогичному (2.4), может быть приведена обратная задача для одномерного двухфазного фильтрационного течения [3]. При этом автомодельность ядра интегрального уравнения является следствием автомодельности течения.

Следует заметить, что если ограничить рассмотрение случаем, когда в каждом слое течение одномерно и автомодельно, то можно получить уравнения (2.4) и (2.5) при более общих условиях – перепад давления может зависеть от времени.

Единственность решения уравнений (2.4) и (2.5) нетрудно показать, воспользовавшись преобразованием Меллина, которое переводит свертку в левых частях уравнений в произведение. Пусть для $f(\alpha)$ справедливо представление

(2.6)
$$
f(\alpha)=f_1(\alpha)+f_2(\alpha)+\sum_{k=1}^{n}h_k\delta(\alpha-\alpha_k),\quad h_k,\ f_1,\ f_2\geqslant 0,\quad 0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n<\infty
$$

Здесь $\delta(\alpha)$ – δ-функция Дирака; $f_2(\alpha)$ – финитная функция, отличная от нуля лишь на отрезке $0<\alpha_-\leqslant\alpha\leqslant\alpha_+<\infty$. На этом отрезке $f_2{}^2(\alpha)$ интегрируема; $f_1(\alpha)$ – ограниченная функция, эквивалентная в нуле $M_-\alpha^{s_-}$, а на бесконечности $M_+\alpha^{s_+}$

(M_-, M_+, s_-, s_+ – положительные константы). Ограничения на скорость убывания $f(\alpha)$ в нуле и на бесконечности вытекают из существования конечной средней проницаемости и конечного среднего сопротивления слоистой системы.

Применение преобразования Меллина к обеим частям (2.4) и (2.5) приводит к системе

$$f^\circ(\omega)v_1^\circ(\omega)=g_1^\circ(\omega),\quad f^\circ(\omega)v^\circ(\omega)=g^\circ(\omega) \tag{2.7}$$

$$f^\circ(\omega)=\int_0^\infty f(\alpha)\alpha^{\omega-1}\,d\alpha$$

Уравнения (2.7) справедливы в некоторой полосе $\Omega=\{\omega|-s_0<\operatorname{Re}\omega<0\}$, причем в этой полосе все функции, входящие в (2.7), аналитические. Из теоремы о единственности определения аналитической функции следует, что если из трех функций – f, v, v_1 – известна хотя бы одна, то остальные две могут быть единственным образом найдены из уравнений (2.7). Из трех задач, имеющих единственное решение, по-видимому, лишь две представляют интерес: скорости v_1, v известны, требуется определить плотность f; задана плотность f, требуется определить скорости v_1, v. Заметим, что в частном случае, когда v_1, v – одномерные скорости, зная v_1 и v, можно найти и относительные фазовые проницаемости (например, применив известный метод Велджа). Итак, относительные фазовые проницаемости могут быть единственным образом найдены при течении в системе изолированных одномерных слоев, если параметры слоистости заданы.

Вместе с тем необходимо иметь в виду, что задача решения уравнений (2.4) и (2.5), являющихся интегральными уравнениями первого рода, относится к числу так называемых некорректно поставленных задач, так как решение не обладает устойчивостью к малым возмущениям исходных данных [4].

Если плотность $f(\alpha)$ обращается в нуль при $\alpha<\alpha_0$, а скорость $v_1(\tau)$ имеет скачок при $\tau=1$, то уравнение (2.4) интегрированием по частям приводится к уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной $F(\alpha)$

$$\frac{g_1(\tau)\tau}{v_1(1)}=F(\tau)+\frac{\tau}{v_1(1)}\int_{\alpha_0}^{\tau}F(\alpha)\frac{v_1'(\tau/\alpha)(\tau/\alpha)+v_1(\tau/\alpha)}{\alpha^2}\,d\alpha,\qquad \alpha_0>0 \tag{2.8}$$

$$F(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}f(s)\,ds$$

Как известно, решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода непрерывно зависит от свободного члена (в метрике пространства L_2), кроме того, оно зависит лишь от прошлого в том смысле, что функция $F(\tau)$ однозначно определяется на всяком интервале $0<\tau<\tau_0$, на котором задана функция $g_1(\tau)$. Из этого следует, что функция распределения сопротивления слоистого пласта определяется одновременно с обводнением пропластков.

Для иллюстрации рассмотрим решение модельной задачи. Радиальное вытеснение нефти водой от центра к периферии слоистого пласта моделировалось путем численного интегрирования уравнения Баклея – Леверетта при постоянном перепаде давления (50 *ат*). Пласт состоит из четырех изолированных слоев постоянной проницаемости k_0/α_i, $i=1,\ldots,4$, $k_0=2$ *дарси*, $\alpha_i=i/2$, мощности слоев $h_i=i$ (*м*). Функция распределения сопротивления слоистого пласта показана на фиг. 1 линией 1. Остальные параметры следующие: внутренний и внешний радиусы области 10 и 10^4 *см*, начальная насыщенность нулевая, граничная – единичная, вязкости $\mu_1=1$ *спз*, $\mu_2=15$ *спз*, фазовые проницаемости $k_1(\sigma)=\sigma^2$, $k_2(\sigma)=(1-\sigma)^2$, пористость 0.25.

К полученному в результате решения прямой задачи суммарному расходу воды на внешнем контуре прибавлялись независимые случайные числа, распределенные по нормальному закону с нулевым средним. Тем самым имитировались погрешности измерений. Среднеквадратическая погрешность составляла 1%. Затем отыскивалась функция распределения сопротивления. Для этого решалось уравнение (2.8), метод решения основан на замене интеграла в (2.8) суммой по формуле трапеций. Результаты приведены на фиг. 1 (линия 2).

3. В качестве другого частного случая общей схемы, описанной в п. 1, рассмотрим нестационарную фильтрацию однородной жидкости.

Изменение давления в бесконечном однородном пласте со скважиной описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial\tau}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\right),\qquad \rho\geqslant1,\qquad \tau\geqslant0 \tag{3.1}$$

$$\rho=r/r_0, \quad \tau=\varkappa_0 t/r_0^2$$

Здесь r_0 – радиус скважины, $\varkappa_0$ – пьезопроводность.

Пусть $p_0(\rho, \tau)$ – решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям

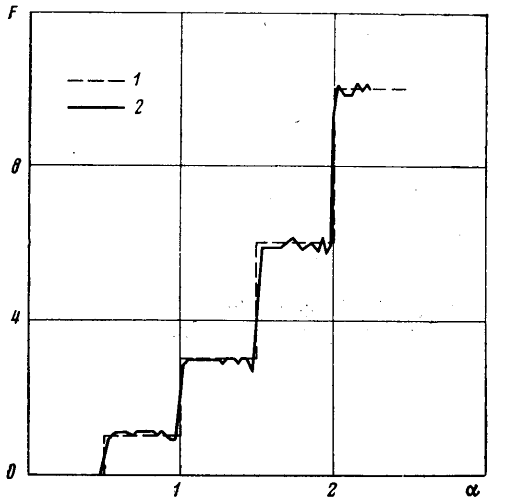
$$p_0(\rho, 0)=0, \quad p_0(1, \tau)=1 \tag{3.2}$$

Если рассмотреть течение в слоистом пласте, в котором параметром слоя является $\gamma=(r^2\varkappa_0)/(r_0^2\varkappa)$, то легко убедиться, что

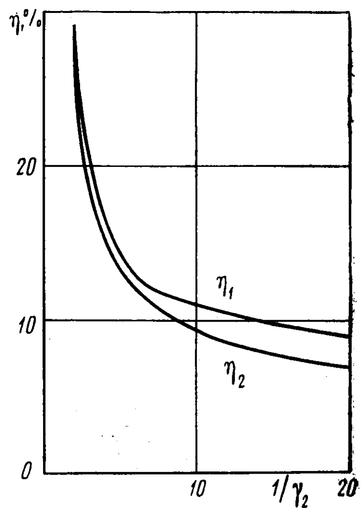
$$q(\tau)=2\pi\int_0^\tau P(\tau-\lambda)\int f_1(\gamma)\frac{1}{\gamma}u'\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)d\gamma\, d\lambda \tag{3.3}$$

$$f_1(\gamma)=\frac{f(\gamma)k(\gamma)}{\mu(\gamma)}, \qquad u(\tau)=-\frac{\partial p_0}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}$$

Здесь $q(\tau)$ и $P(\tau)$ – суммарный расход жидкости и давление на контуре $\rho=1$, f – плотность распределения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Применив преобразование Лапласа к обеим частям (3.3), можно получить линейное интегральное уравнение, ядро которого не зависит от граничного условия. Таким образом, вопрос об единственности решения уравнения достаточно рассмотреть для какого-нибудь одного граничного условия, например, для второго условия (3.2).

Как известно, функция $u(\tau)$ неограничена в окрестности нуля: при $\tau\to 0$ $u(\tau)\sim\sqrt{\tau}+{}^1\!/_2+(\pi\tau)^{-1/2}$.

Поэтому будем рассматривать уравнение

$$q_0(\tau)=2\pi\int f_1(\gamma)u_0(\tau/\gamma)\,d\gamma \tag{3.4}$$

$$u_0(\tau)=u(\tau)-\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}-\frac{1}{2}, \qquad q_0(\tau)=q(\tau)-A-B\frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

$$A=\pi\int f_1(\gamma)\,d\gamma, \qquad B=2\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int\sqrt{\gamma}f_1(\gamma)\,d\gamma$$

в котором $u_0(\tau)$ непрерывна и в нуле эквивалентна $\sqrt{\tau}$. (Если $q(\tau)$ задана, то, очевидно, коэффициенты A и B могут быть найдены из наблюдений q при малых τ.) Уравнение (3.4) аналогично (2.5) имеет единственное решение. Известно, однако, что при малых τ модель (3.1) неадекватна процессу в реальном пласте. Параболическое уравнение получено из условия малости сил инерции при фильтрационном течении и потому несправедливо в начальный период времени после пуска скважины, когда это условие не выполняется. Кроме того, в начальный период времени, когда течением в основном охвачена призабойная зона скважины, имеющая обычно весьма сложное строение, течение нельзя считать радиальним. В силу этих и ряда других причин, обусловленных сложными явлениями в призабойной зоне и не учитываемых моделью фильтрации, следует считать дебиты и забойные давления известными лишь для достаточно больших τ. С другой стороны, при очень больших τ процесс вследствие затухания не наблюдаем на фоне случайных помех. Таким образом, практически располагаем информацией, сосредоточенной на конечном интервале $0<\tau_-<\tau<<\tau_+<\infty$. Имея в виду некорректность исходного уравнения, следует ожидать, что задача при этом станет информационно недоопределенной.

Действительно, очевидно, что на конечном интервале гладкая функция $u(\tau)$ может быть с высокой точностью аппроксимирована кривой из семейства $l\tau^s$. При этом уравнение (3.3) обращается в

$$q(\tau)=l\tau^s\int\gamma^{-s}f_1(\gamma)\,d\gamma$$

и задача, вырождаясь, становится разрешимой не единственным образом.

Близость задачи к вырожденной хорошо видна на следующем простом примере. Пусть пласт состоит из двух пропластков с параметрами γ_1 и γ_2, тогда задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Согласно [5], $u(\tau)\sim 1/\ln\sqrt{\tau}$ при $\tau\to\infty$. Обозначив $q_j=q(\tau_j)$, $a_j=\ln\tau_j$, $b_i=-\ln\gamma_i$, получим

$$2\pi\sum_{i=1}^{2}\frac{h_i}{a_j+b_i}=q_j \tag{3.5}$$

Определитель системы (3.5) при $j=1,2$ имеет вид

$$\Delta=\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{(b_1+a_1)(b_2+a_2)(b_1+a_2)(b_2+a_1)}$$

Хотя $\Delta\neq0$, видно, что с ростом $|a_j|$ и $|b_i|$ $\Delta\to0$, при этом возрастает чувствительность решения к различного рода погрешностям. Неустойчивость зависит также от близости свойств пропластков: $\Delta\to0$ при $|b_1-b_2|\to0$.

Влияние погрешности суммарного расхода на результат решения обратной задачи исследовалось численно. Система уравнений (3.5) с возмущенным свободным членом решалась методом наименьших квадратов относительно h_1 и h_2 при различных соотношениях γ_1/γ_2.

Параметры были выбраны следующие $\tau_j=100+j\cdot1000$, $j=0,\ldots,99$, $h_1=h_2=1$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2={}^1/_2, {}^1/_3,\ldots,{}^1/_{20}$. Погрешности суммарного расхода моделировались так же, как в примере, рассмотренном в п. 2. Зависимость η_i – коэффициента вариации мощности i-го пропластка от $1/\gamma_2$ показана на фиг. 2.

Как видно из фиг. 2, при средней погрешности измерения суммарного расхода 1% различимыми являются пропластки, свойства которых различаются ≈10 раз. На практике обычно погрешности измерения расхода составляют 2–5%. В силу линейности задачи η_i возрастут в соответствующее число раз. Совершенно очевидно, что такая разрешающая способность является недостаточной для определения функции $f_1(\gamma)$, что еще раз подтверждает выводы [1, 2].

Поступила 7 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменецкий С. Г. Борисов Ю. П.* К вопросу об определении основных гидродинамических параметров в пластах, расчлененных на отдельные пропластки. Тр. Всесоюз. нефтегаз. науч.-исслед. ин-та, 1959, вып. 19.
2. *Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М.* Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.
3. *Вайнберг Я. М. Вирновский Г. А., Швидлер М. И.* О некоторых обратных задачах теории двухфазной фильтрации. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1975.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
5. *Van Everdingen A. F., Hurst W.* The application of Laplace transformation to flow problems in reservoirs. J. Petrol. Technology, 1949, vol. 1, No. 12.