

численные результаты, представленные также в виде линий равного влагосодержания, нанесены на фиг. 1, 2 кривыми б с нумерацией, соответствующей ранее указанной.

Удовлетворительное совпадение результатов, полученных в различных подходах к расчету процесса распространения влаги в грунте (лучшее совпадение может быть получено в расчетах на более мелких разностных сетках), подтверждает возможность моделирования поступления воды из трубы с помощью точечного источника и дает основание для использования представленного численного метода при оценке характеристик процесса влагопереноса в почве и выборе лучших условий подпочвенного орошения.

В заключение авторы благодарят М. Г. Хубляряна за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 7 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fok Y. -S., Willardson L. S. Subsurface irrigation system analysis and design. J. Irrigation and Drainage Division, 1971, vol. 97, No. 3.
2. Чайлдс Э. Физические основы гидрологии почв. Л., Гидрометеоздат, 1973.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.

УДК 532.546

### РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ РАБОТЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ЗАКРЫТЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ДРЕН

А. БЕГМАТОВ, Г. П. БЕЛОВА, Д. Ф. ШУЛЬГИН

(Ташкент, Калинин)

В гидродинамической постановке рассматривается неустановившаяся фильтрация в водоносной толще при работе конечного числа закрытых дрен и наличии переменного инфильтрационного питания. Дрены моделируются линейными стоками с известными переменными во времени расходами на единицу длины дрен. Найденные в работе зависимости позволяют прогнозировать, а при необходимости также регулировать динамику уровня грунтовых вод на дренируемом массиве, что имеет практический интерес в задачах по изучению процессов засоления и заболачивания земель.

1. Однородный пласт на водоупоре. Рассмотрим следующую краевую задачу (фиг. 1) [1, 2]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \delta(z-z_0) \sum_{j=1}^N q_j(t) \delta(x-x_j)$$

$$\frac{\partial H(x, z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial H(x, z, t)}{\partial z} = W(x, t) \quad (z=1).$$

$$\frac{\partial H(x, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (z=0), \quad H(x, 1, 0) = 1, \quad H = \frac{H'(x, z, t)}{h_e}, \quad x = \frac{x'}{h_e},$$

$$z = \frac{z'}{h_e}, \quad t = \frac{t'k}{h_e \mu}, \quad b = 1 + \frac{\varepsilon}{k}, \quad q_i = \frac{q_i'}{kh_e}, \quad W = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Здесь  $H'$  — напор,  $t'$  — время,  $x', z'$  — координаты точки,  $q_j'(t)$  — интенсивности стоков,  $j=1, \dots, N$ ,  $N$  — число стоков (дрен),  $\mu$  — коэффициент водоотдачи,  $k$  — коэффициент фильтрации,  $h_e$  — ордината горизонтальной плоскости, которой приближенно заменяется поверхность грунтовых вод в начальный момент времени [3],  $\delta(x-x_j)$ ,  $\delta(z-z_0)$  — импульсивные функции (функции Дирака) [4],  $\varepsilon(x, t)$  — интенсивность инфильтрационного питания грунтовых вод, о выборе этой функции будет сказано ниже.

Функцию  $H(x, z, t)$  будем искать в виде  $H(x, z, t) = H_1(x, z, t) + H_2(x, z, t)$ , где  $H_1(x, z, t)$  и  $H_2(x, z, t)$  — решения задач:

$$(1.2) \quad \Delta H_1 = \delta(z-z_0) \sum_{j=1}^N q_j(t) \delta(x-x_j), \quad \Delta H_2 = 0$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial H_i(x, z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial H_i(x, z, t)}{\partial z} = W_i(x, t) \quad (z=1; i=1, 2; W_1=0, W_2=W)$$

$$(1.4) \quad H_1(x, z, 0) = 1(z=1), \quad H_2(x, z, 0) = 0(z=1), \quad \frac{\partial H_i(x, z, t)}{\partial z} = 0(z=0; i=1, 2)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа по переменным  $x$  и  $z$ .

Рассмотрим случай, когда  $\varepsilon \ll k$ , обычно имеющий место в мелиоративной практике при орошении и дождеванием.

Применяя преобразование Фурье [4]

$$H_1^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1-H_1) e^{-i\alpha x} dx, \quad H_2^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_2 e^{-i\alpha x} dx$$

соотношения (1.2)–(1.4) в области изображений запишем:

$$(1.5) \quad \frac{d^2 H_1^*}{dz^2} - \alpha^2 H_1^* = q_0 \delta(z-z_0), \quad \frac{d^2 H_2^*}{dz^2} - \alpha^2 H_2^* = 0,$$

$$q_0 = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^N q_j e^{-i\alpha x_j}$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial H_i^*(\alpha, z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial H_i^*(\alpha, z, t)}{\partial z} = W_i^*(\alpha, t) \quad (z=1; i=1, 2; W_1^*=0; W_2^*=W^*)$$

$$(1.7) \quad H_i^*(\alpha, z, 0) = 0(z=1), \quad \frac{\partial H_i^*(\alpha, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (z=0; i=1, 2)$$

Здесь  $W^*(\alpha, t)$  — изображение Фурье функции  $W(x, t)$ .

Решение первого уравнения (1.5) при условиях (1.6), (1.7) имеет вид

$$(1.8) \quad H_1^* = A_1 \operatorname{ch} \alpha z \quad (0 \leq z \leq z_0), \quad H_1^* = A_2 \operatorname{ch} \alpha z + B_2 \operatorname{sh} \alpha z \quad (z_0 \leq z \leq 1)$$

На линии дренажа  $z=z_0$  имеем условия

$$(1.9) \quad H_1^*(\alpha, z, t) \Big|_{z=z_0+0} = H_1^*(\alpha, z, t) \Big|_{z=z_0-0}, \quad \frac{dH_1^*(\alpha, z, t)}{dz} \Big|_{z=z_0+0} -$$

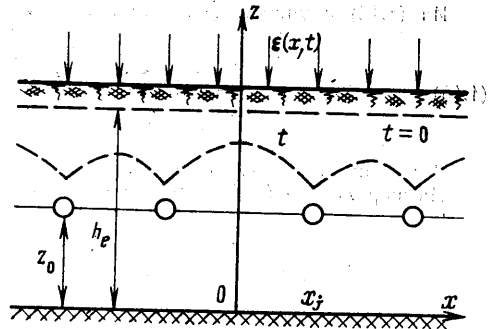
$$- \frac{dH_1^*(\alpha, z, t)}{dz} \Big|_{z=z_0-0} = q_0$$

выражающие в области оригинала равенство напоров и разность расходов, равную суммарному дебиту дрен.

Из второго соотношения (1.9)  $B_2(\alpha, t) = (q_0 \operatorname{ch} \alpha z_0) / \alpha$ .

Из условия (1.6) с учетом первого соотношения (1.7) имеем

$$A_2(\alpha, t) = - \int_0^t \left[ \alpha B_2(\alpha, \tau) + \operatorname{th} \alpha \frac{\partial B_2(\alpha, \tau)}{\partial \tau} \right] \times \exp[-\alpha(t-\tau) \operatorname{th} \alpha] d\tau - B_2(\alpha, 0) \exp(-\alpha t \operatorname{th} \alpha)$$



Фиг. 1

Зная  $A_2(\alpha, t)$ ,  $B_2(\alpha, t)$ , из первого соотношения (1.9) легко найти  $A_1(\alpha, t)$ .

Таким образом решение (1.8) будет найдено окончательно.

Переходим к оригиналу. Не выписывая полученного решения  $H_1(x, z, t)$  в любой точке области фильтрации, приведем лишь его выражение на свободной поверхности:

$$(1.10) \quad H_1(x, 1, t) = h_1(x, t) = 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N \int_0^t q_j(t-\tau) d\tau \times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha} \exp[-\alpha t \operatorname{th} \alpha] \cos \alpha(x-x_j) d\alpha$$

Здесь  $x_j, z_0$  — координаты дрен, расстояния между ними могут быть разными. Решение второго уравнения (1.5) при условиях (1.6), (1.7) имеет вид

$$(1.11) \quad H_2^*(\alpha, z, t) = A \operatorname{ch} \alpha z, \quad A(\alpha, t) = \int_0^t \frac{W^*(\alpha, \tau)}{\operatorname{ch} \alpha} \exp[-(t-\tau) \alpha \operatorname{th} \alpha] d\tau$$

Переходя в (1.11) к оригиналу для функции  $H_2(x, z, t)$ , на свободной поверхности имеем:

$$(1.12) \quad H_2(x, 1, t) = h_2(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} W^*(\alpha, t-\tau) \exp[-\alpha t \operatorname{th} \alpha] \cos \alpha x d\alpha$$

Окончательно уравнение кривой депрессии фильтрационного потока будет иметь вид

$$(1.13) \quad h(x, t) = H(x, 1, t) = h_1(x, t) + h_2(x, t)$$

Здесь  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$  определяются по приведенным зависимостям (1.10) и (1.12) соответственно.

При решении задачи предполагалось, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(x, t)| dx < \infty, \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon(-x, t) \quad \left( W = \frac{\varepsilon}{k} \right)$$

Остановимся на двух простейших случаях инфильтрационного питания.

1. Переменное инфильтрационное питание задано на полосе шириной  $2M$ :  $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(t)$  при  $|x| < M$ ,  $\varepsilon = 0$  при  $|x| > M$ , где  $M$  — заданная величина.

Тогда

$$(1.14) \quad W^*(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon_0(t)}{k} \frac{\sin M\alpha}{\alpha}$$

Из (1.12) с учетом (1.14) получим следующее выражение для  $h_2(x, t)$ :

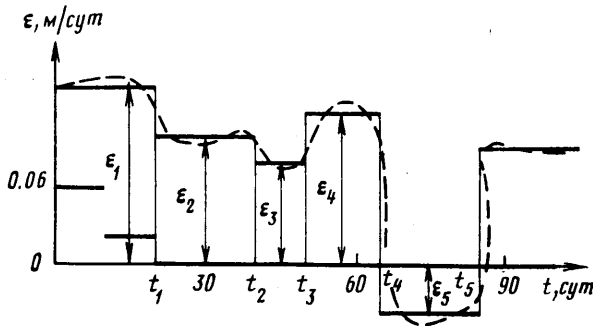
$$(1.15) \quad h_2(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0(\tau)}{k} \frac{\sin M\alpha}{\alpha} \cos \alpha x \exp[-\alpha(t-\tau) \operatorname{th} \alpha] d\alpha$$

2. Сплошное инфильтрационное питание  $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(t)$ ,  $-\infty < x < \infty$ .  
Из выражения (1.15) при  $M \rightarrow \infty$  имеем

$$h_2(x, t) = \frac{1}{k} \int_0^t \varepsilon_0(\tau) d\tau$$

Решение (1.13) позволяет с помощью ЭЦВМ определять положение уровня грунтовых вод в условиях инфильтрационного питания подземных вод.

Если реальную непрерывную функцию  $\varepsilon(t)$  аппроксимировать кусочно-постоянной функцией (Фиг. 2), что всегда можно выполнить с достаточной для практики



Фиг. 2

точностью, и применить метод наложения потоков, то выражение (1.15) примет вид

$$h_2(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{k} \int_0^\infty \frac{\sin M\alpha}{\alpha} \cos \alpha x \frac{1 - \exp[-\alpha(t-t_{i-1}) \operatorname{th} \alpha]}{\alpha \operatorname{th} \alpha} d\alpha$$

где  $n$  — число ступеней изменения  $\varepsilon(t)$  в интервале  $[0, T]$ ,  $T$  — рассматриваемый период изменения функции  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ .

Для расчетов на ЭЦВМ проводятся некоторые преобразования, после чего выражения  $h_1(x, t)$  и  $h_2(x, t)$  в (1.13) для случая полосового инфильтрационного питания примут вид

$$h_1(x, t) = 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^t q_j(t-\tau) d\tau \int_0^{\alpha_0} \frac{\operatorname{ch} \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha} \exp[-\alpha \tau \operatorname{th} \alpha] \cos \alpha(x-x_j) d\alpha,$$

$$h_2(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{k} \left\{ (t-t_{i-1}) \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy - \right. \\ \left. - (t-t_{i-1}) \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left[ 1 - \cos(xy/M) \frac{1 - \exp[-(t-t_{i-1})y \operatorname{th}(y/M)/M]}{(t-t_{i-1})y \operatorname{th}(y/M)/M} \right] du + \right. \\ \left. + \frac{M \ln 3}{\operatorname{th}(1/M)} - \frac{1}{\operatorname{th}(1/M)} \int_{1/M}^{m_i/M} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 - (0.5/M)^2}{\alpha^2} \frac{\operatorname{th}(1/M)}{\operatorname{th} \alpha} \times \right. \right.$$

$$\times \sin M\alpha [1 - \exp(-\alpha(t-t_{i-1}) \operatorname{th} \alpha)] \cos \alpha x \left. \vphantom{\sin M\alpha} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^2 - (0.5/M)^2}$$

Здесь  $\alpha_0$  — величина, задаваемая в зависимости от требуемой точности.

Значение  $m_1$  следует подобрать таким, чтобы сделать достаточно малым  $|\beta_1|$ , где

$$|\beta_1| \leq \frac{M}{\operatorname{th}(1/M)} \ln \frac{m_1 + 0.5}{m_1 - 0.5}$$

$$\beta_1 = - \frac{1}{\operatorname{th}(1/M)} \int_{m_1/M}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 - (0.5/M)^2}{\alpha^2} \frac{\operatorname{th}(1/M)}{\operatorname{th} \alpha} \times \right. \\ \left. \times \sin M\alpha \cos \alpha x [1 - \exp(-\alpha(t-t_{i-1}) \operatorname{th} \alpha)] \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^2 - (0.5/M)^2}$$

На фиг. 3 представлены результаты расчетов приведенного выше решения (1.13) при наличии полосового инфильтрационного питания  $2M=800$  м и при следующих значениях параметров:  $h(x, 1, 0) = h_e = 1.5$  м,  $z_0 = 0.5$  м,  $k = 0.5$  м/сут,  $\mu = 0.2$ ,  $q = 0.08$  м<sup>2</sup>/сут. Принималось, что инфильтрация происходит в течение  $T = 100$  суток по закону, изображенному на фиг. 2. При этом полагалось  $N=3$ , а расстояние между дренами постоянным и равным  $|x_j - x_{j-1}| = B = 40$  м ( $j=1, \dots, N$ ).

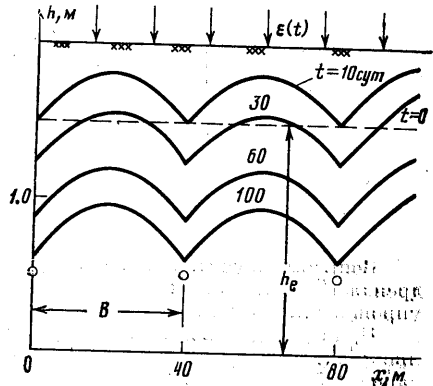
На фиг. 4 представлены результаты расчетов при тех же значениях параметров, но при разных расстояниях между дренами.

Считали, что  $|x_2 - x_1| = 40$  м,  $|x_3 - x_2| = 80$  м.

**2. Однородный пласт, отделенный от напорного горизонта слабопроницаемой прослойкой.** Пусть однородный пласт сообщается через слабопроницаемую прослойку, имеющую мощность  $m_p$  и коэффициент фильтрации  $k_p$ , с нижележащим напорным горизонтом, напор  $H_0'$  в котором считается постоянным.

В этом случае второе условие (1.1) нужно заменить условием

$$\frac{\partial H(x, 0, t)}{\partial z} = -\beta(1 - H(x, 0, t)), \\ \beta = \frac{k_p}{k m_p}, \quad H = \frac{H'(x, z, t)}{H_0'}$$



Фиг. 3

$$z = \frac{z'}{H_0'}$$

Опуская выкладки, аналогичные проделанным для случая однородного пласта на водоупоре, приведем уравнение кривой депрессии фильтрационного потока

$$(2.1) \quad h(x, t) = H(x, t) = h_1(x, t) + h_2(x, t)$$

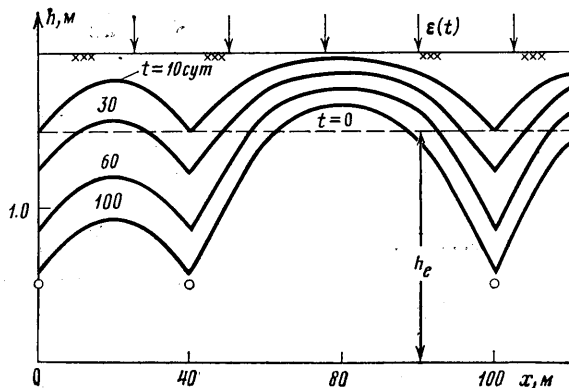
$$h_1(x, t) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N q_j(0) \int_0^t \cos \alpha(x-x_j) f_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \exp[-f_2(\alpha)t] d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{dq_j(\tau)}{d\tau} f_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha(x-x_j) \exp[-(t-\tau)f_2(\alpha)] d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_0^t q_j(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \alpha \operatorname{sh} \alpha f_1(\alpha) \cos \alpha(x-x_j) \exp[-(t-\tau)f_2(\alpha)] d\alpha - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N q_j(t) \int_0^t f_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha(x-x_j) d\alpha$$

$$h_2(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} W^*(\alpha, \tau) \cos \alpha x \exp[-(t-\tau)f_2(\alpha)] d\alpha$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \alpha z_0 + \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha z_0, \quad f_2(\alpha) = \frac{(\alpha/\beta) \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha}{(1/\beta) \operatorname{ch} \alpha + (1/\alpha) \operatorname{sh} \alpha}$$

При отсутствии слабопроницаемой прослойки уравнение кривой депрессии легко получается из (2.1) при  $m_p=0$ .

Следует заметить, что случай систематического горизонтального дренажа при  $m_p=0$  и стационарном режиме фильтрации рассмотрен в [5].



Фиг. 4

Вопросы неустановившейся фильтрации для систематического горизонтального дренажа рассматривались главным образом в гидравлической постановке при ряде упрощающих допущений [2, 6].

Приведенные формулы (1.13) и (2.1) могут быть использованы при расчете депрессионных кривых на междреньях и в случае, когда междренные расстояния одного порядка с мощностью водоносного слоя и, следовательно, предпосылки Дюпюи могут не выполняться. Такие условия имеют место, например, при дренировании земель Нечерноземной зоны, где междренные расстояния выбираются сравнительно малыми.

Поступила 10 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бегмагов А. К задаче о понижении уровня грунтовых вод в покровной слабопроницаемой толще двухслойного пласта. В сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения». Ташкент, «Фан», 1977.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
3. Шульгин Д. Ф. О фильтрации в слоистой толще при работе систематического дренажа в условиях напорного питания. Сб. тр. по агрономической физике, 1973, вып. 31.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
5. Аверьянов С. Ф. О расчете осушительного действия горизонтального дренажа в условиях напорного питания. Научн. зап. Моск. ин-та инж. водного хоз-ва, 1960, т. 22.
6. Аверьянов С. Ф. Горизонтальный дренаж при борьбе с засолением орошаемых земель. М., Изд-во АН СССР, 1959.