

На фиг. 2 приведена зависимость силы сопротивления частицы от концентрации при $\beta=0,1, \infty$ (группы кривых 1, 2, 3 соответственно) для разных моделей: сплошная тонкая линия — модель [2], штриховая линия — сила сопротивления по модели [1], сплошная жирная линия — предлагаемая модель. Видно, что при $\beta=\infty$ она занимает промежуточное положение и при всех β полученная сила сопротивления больше, чем по модели Хаппеля.

Автор благодарит Ю. П. Гупало за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 14 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Happel J.* Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particle. *A. I. Ch. E. Journal*, 1958, vol. 4, No. 2.
2. *Kuwabara S.* The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres on a viscous flow at small Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan*, 1959, vol. 14, No. 4.
3. *Marrucci G.* Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. *Ind. and Engng Chem. Fundament.*, 1965, vol. 4, No. 2.
4. *Gal-Or B.* On motion of bubbles and drops. *Canad. J. Chem. Engng*, 1970, vol. 48, No. 5.
5. *Yaron J., Gal-Or B.* Relative velocities and pressure drops in clouds of drops, babbles or solid particles. *A. I. Ch. Journal*, 1971, vol. 17, No. 5.
6. *Leclair B. P., Hamielec A. E.* Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers — a cell model for transport in bubble swarms. *Canad. J. Chem. Engng*, 1971, vol. 49, No. 6.
7. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
8. *Буевич Ю. А.* Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. *ПМТФ*, 1966, № 3.

УДК 532.529:534.2.532

УЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОМАСООБМЕНА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ

В. Ш. ШАГАПОВ

(Уфа)

В работе рассматривается распространение малых возмущений в жидкости с парогазовыми пузырьками. Учет тепломассообмена между фазами проводится на основании точных уравнений теплопроводности и диффузии. Цель данного исследования — уточнение результатов работы [1] и проверка приемлемости использования фиксированных коэффициентов теплообмена и массообмена для нестационарного тепломассообмена между пульсирующим пузырьком и жидкостью.

1. **Основные уравнения.** Рассмотрим распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками при следующих допущениях. Длина волны много больше расстояний между пузырьками, которые, в свою очередь, гораздо больше размеров пузырьков. Смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного диаметра. Вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия, в частности при пульсациях пузырьков. Газовая фаза состоит из двух компонент, а именно из паров жидкой фазы и некоторого «инертного» газа, не участвующего в процессе массообмена между фазами. Скорости фаз совпадают [1] ($v_1=v_2$).

Для рассматриваемой смеси в рамках представленной сплошной среды [2] запишем в линейном приближении дифференциальные уравнения сохранения массы для каждой фазы, числа пузырьков, импульса всей смеси, а также пульсационного движения для одномерного случая

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v}{\partial x} = -I, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v}{\partial x} = I, \quad (\rho_{10} + \rho_{20}) \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial t} = w + \frac{I}{\pi \delta_0^2 n_0 \rho_{10}^0}, \quad \frac{\delta_0}{2} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{10}^0} - 8 \frac{v_1}{\delta_0} w \quad (I = \pi n_0 \delta_0' j)$$

Здесь индекс $i=1,2$ относится к параметрам соответственно жидкости и газа; ρ , ρ^0 , v , p , n , w , δ — соответственно возмущения средней плотности, истинной плотности, скорости, давления, числа пузырьков в единице объема, массовой радиальной скорости жидкости на поверхности раздела фаз, диаметра пузырьков; I и j — интенсивности массообмена, отнесенные к единице объема смеси и к единице площади поверхности раздела фаз; параметры, соответствующие невозмущенному равновесному состоянию, снабжены дополнительно индексом 0.

Вместо уравнений притоков тепла, а также кинетики массообмена, использованной в [1], применяются уравнения теплопроводности внутри и вне пузырька, а также уравнение диффузии внутри пузырька со следующими граничными условиями:

$$(1.2) \quad \rho_{20}^{\circ} c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_2}{\partial t} + \rho_{20}^{\circ} (c_{pg} - c_{pb}) \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\left(0 < r < \frac{1}{2} \delta_0 \right)$$

$$\rho_{10}^{\circ} c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \quad \left(r > \frac{1}{2} \delta_0 \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_m r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) \quad \left(0 < r < \frac{1}{2} \delta_0 \right) \quad (c_2 = c_{pb} g_0 + c_{pg} (1 - g_0))$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = lj, \quad j = \rho_{10}^{\circ} g_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial t} - w \right) + \rho_{20}^{\circ} \lambda_m \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$T_1 = T_2 = T_{\sigma} \quad \left(r = \frac{1}{2} \delta_0 \right)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial r} = 0 (r=0), \quad T_1 = 0 \quad (r = \infty)$$

Здесь T_1 , T_2 , g — пространственное распределение температур и массовой концентрации парового компонента, l — теплота испарения жидкой фазы, c_{pb} , c_{pg} — удельные теплоемкости при постоянном давлении для парового и инертного компонентов.

Уравнениями (1.2) для тепломассообмена нужно пользоваться для достаточно больших частот [3, 4], чтобы длины «микроскопических» температурных волн около поверхности пузырьков, инициируемых их радиальными движениями, были значительно меньше, чем среднее расстояние между ними. При достаточно малых частотах, когда длины этих микроскопических волн значительно больше характерных размеров неоднородностей, температурной неравновесностью между фазами можно пренебречь. В этом случае тепловая дисперсия учитывается как для однофазных сред на основании уравнения теплопроводности для всей смеси в целом.

$$(1.3) \quad (\rho_{10} c_1 + \rho_{20} c_2) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Il + \alpha_{20} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \rho_{20} (c_{pg} - c_{pb}) \frac{\partial g}{\partial t}$$

Здесь λ — эффективный коэффициент теплопроводности для смеси в целом. В качестве уравнений состояния будем использовать соотношения

$$p_1 = p_0 + a_1^2 (\rho_1^{\circ} - \rho_{10}^{\circ}), \quad p_2 = \rho_2^{\circ} B T_2$$

$$\rho_2^{\circ} = \frac{24}{\delta_0^3} \int_0^{\frac{1}{2} \delta_0} r^2 \rho_2^{\circ} dr, \quad B = B_b g + B_g (1 - g)$$

Здесь ρ_2° — пространственное распределение плотности внутри пузырьков.

Внутри пузырьков будем полагать условие гомобаричности [5, 6]. Примем, что парциальное давление паров жидкой фазы на поверхности пузырьков равно давлению насыщенных паров при температуре, равной температуре поверхности раздела фаз

$$(1.4) \quad p_s(T_{\sigma}) = B_b g p_2 / B \quad (r = \frac{1}{2} \delta_0)$$

Введем безразмерные переменные и параметры

$$(1.5) \quad \begin{aligned} P &= \frac{p}{p_0}, \quad U = \frac{v}{a_*}, \quad W = \frac{w}{a_*}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \Phi_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i0}}, \\ \Phi_i^\circ &= \frac{\rho_i^\circ}{\rho_{i0}^\circ} \quad (i=1, 2) \\ \Phi_2^{\circ'} &= \frac{\rho_2^{\circ'}}{\rho_{20}^{\circ'}}, \quad D = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad N = \frac{n}{n_0}, \quad R = \frac{2r}{\delta_0}, \quad L = \frac{l}{c_2 T_0} \\ j^* &= \frac{6j}{\rho_{20}^\circ \delta_0 a_*} \quad \left(a_*^2 = \frac{p_0}{\rho_{10}^\circ} \right) \\ \alpha_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1^\circ}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2^\circ} = \frac{\pi}{6} n \delta^3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \tau = a_* l \end{aligned}$$

Уравнения состояния и выражения (1.4), (1.5) в безразмерных переменных после линеаризации имеют вид

$$(1.6) \quad \alpha_i = \alpha_{i0} (\Phi_i - \Phi_i^\circ) \quad (i=1, 2), \quad \alpha_2 = \alpha_{20} (N + 3D), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} P_1 &= A_{10}^2 \Phi_1^\circ, \quad P_2 = G_g + \theta_2 + \Phi_2^{\circ'}, \quad \Phi_2^\circ = 3 \int_0^1 \Phi_2^{\circ'} R^2 dR \\ A_{10}^2 &= \frac{a_1^2}{a_*^2}, \quad G = \frac{B_0 - B_g}{B_0} \theta_s', \quad Q = \frac{B_b g_0}{B_0} \theta_s', \quad F = \frac{B_0}{c_2} \\ &\left(\theta_s' = \left(\frac{dP_s}{d\theta_s} \Big|_{\theta_s=1} \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Система (1.1) после некоторых преобразований с использованием соотношений (1.6), а также уравнения (1.3) в безразмерных переменных имеют вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} \frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \alpha_{20} s \frac{\partial \Phi_2^\circ}{\partial \tau} + 3(s-1) \frac{\partial D}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_2^\circ}{\partial \tau} + 3 \frac{\partial D}{\partial \tau} = j^* \\ (\alpha_{10} + s\alpha_{20}) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{P_2 - P_1}{\delta_0} - \frac{W}{\tau_r}, \\ \frac{W}{\delta_0} &= -\frac{1}{6} \left(s \frac{\partial \Phi_2^\circ}{\partial \tau} + 3(s-1) \frac{\partial D}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} &= \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial R} \right) + F \frac{\partial P_2}{\partial \tau} + F_1 \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad (0 < R < 1) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial R} \right) \quad (R > 1) \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} &= \frac{1}{\tau_m} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial g}{\partial R} \right) \quad (0 < R < 1) \\ \frac{x}{\tau_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial R} - \frac{1}{\tau_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial R} &= \frac{Lj^*}{3} \quad j^* = \frac{3}{\tau_m} \frac{1}{1-g_0} \frac{\partial g}{\partial R}, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_0 = Eg + QP_2 \\ (R=1) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial R} &= 0, \quad \frac{\partial g}{\partial R} = 0 \quad (R=0), \quad \theta_1 = 0 \quad (R=\infty) \end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{c_{pg} - c_{pb}}{c_2}, \quad \kappa = \frac{\rho_{10}^\circ c_1}{\rho_{20}^\circ c_2}, \quad \tau_2 = \frac{\delta_0^2 a_*}{8\nu_1}$$

$$\tau_i = \frac{\rho_{i0}^\circ c_i a_* \delta_0^2}{4\lambda_i} \quad (i=1, 2), \quad \tau_m = \frac{a_* \delta_0^2}{4\lambda_m}$$

2. Исследование системы. Решение системы (1.8) и (1.9) ищем в виде затухающей бегущей волны

$$\Phi, U, P, \theta \sim \exp [i(Kx - \omega t)] = e^{-dx} \exp [i(kx - \omega t)]$$

$$K = k + id, \quad a_p = A_p a_* = \omega/k$$

где K — волновой вектор (комплексное число d , a_p — соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны, определяемые мнимой и действительной частями волнового вектора). В дальнейшем вместо частоты ω используем безразмерную $\eta = \omega \delta_0 / a_*$. Тогда уравнения (1.8) примут вид

$$(2.1) \quad -i\eta \frac{\tau_2}{\delta_0} \theta_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial R} \right) - i\eta \frac{\tau_2}{\delta_0} F P_2 - i\eta \frac{\tau_2}{\delta_0} F_1 g \quad (0 < R < 1)$$

$$-i\eta \frac{\tau_1}{\delta_0} \theta_1 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial R} \right) \quad (R > 1)$$

$$-i\eta \frac{\tau_m}{\delta_0} g = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial g}{\partial R} \right) \quad (0 < R < 1)$$

Решение системы (2.1) с учетом граничных условий

$$(2.2) \quad \theta_1 = \frac{\pi_1 e^{\nu_1(1-R)}}{R} P_2, \quad g = \frac{(\pi_1 - Q) \operatorname{sh} \nu_m R}{ER \operatorname{sh} \nu_m} P_2$$

$$\theta_2 = \beta g + \left\{ F + \left[\pi_1 - F - \frac{\beta(\pi_1 - Q)}{E} \right] \frac{\operatorname{sh} \nu_2 R}{R \operatorname{sh} \nu_2} \right\} P_2$$

$$\pi_1 = \frac{(1-g_0) [EF\Pi_2 + \beta Q(\Pi_2 - \Pi_m)] + LQ\Pi_m \tau_2 / \tau_m}{(1-g_0) \{E[\kappa(\nu_1 + 1)\tau_2 / \tau_1 + \Pi_2] + \beta(\Pi_m - \Pi_2)\} + L\Pi_m \tau_2 / \tau_m}$$

$$\Pi_j = \nu_j \operatorname{cth} \nu_{j-1} \quad (j=2, m), \quad \nu_j = \sqrt{-i\eta \tau_j / \delta_0}$$

Амплитуды для Φ_2^0 и D выразим через амплитуду P_1 с помощью уравнений пульсации (четвертое и пятое уравнения (1.7)), а также используя соотношения (1.6) на основании решений системы (2.1). Тогда, подставляя полученные выражения в уравнение для амплитуд, следующее из первого уравнения (1.7), и учитывая уравнение импульса, найдем дисперсионное уравнение

$$(2.3) \quad \frac{K^2 \delta_0^2}{\eta^2} = (\alpha_{10} + s\alpha_{20}) \left\{ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \left[\frac{i\eta}{6} \left(\frac{i\eta}{2} - \frac{\delta_0}{\tau_r} \right) + \pi_T^{-1} \right]^{-1} \right\}$$

$$\pi_T = 1 - F + 3 \frac{\delta_0}{i\eta \tau_2} \frac{\pi_2 \pi_3 - (F - Q) [L\Pi_m \tau_2 / \tau_m + \beta(\Pi_m - \Pi_2)] \Pi_2 - (1 - g_0) \kappa EF(\nu_1 + 1) \Pi_2 \tau_2 / \tau_1}{(1 - g_0) \{E[\kappa(\nu_1 + 1)\tau_2 / \tau_1 + \Pi_2] + \beta(\Pi_m - \Pi_2)\} + LQ\Pi_m \tau_2 / \tau_m}$$

$$\pi_2 = (F - Q) \Pi_2 - \kappa Q(\nu_1 + 1) \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

$$\pi_3 = [1 - s + (1 - g_0)(G + \beta)] \Pi_m \frac{\tau_2}{\tau_m} - (1 - g_0) \beta \Pi_2$$

При $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$ находим соответственно равновесную и «замороженную» скорости звука

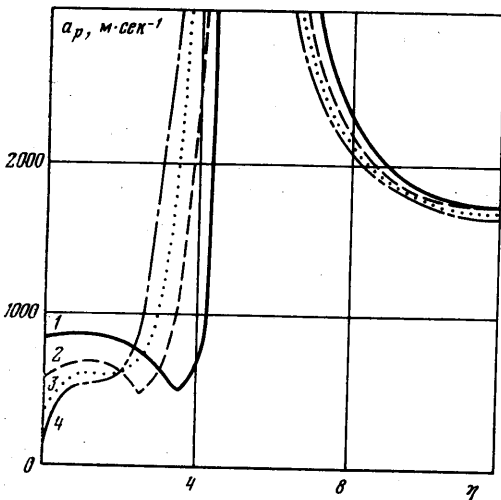
$$a_e^{-2} = a_*^{-2} \alpha_{10} \left[\frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \frac{1 + g_0(\xi - 1)}{1 - g_0} \right], \quad a_f \approx a_1, \quad \xi = \frac{B_b}{B_g}$$

В случае чисто паровых и чисто газовых пузырьков соответственно имеем

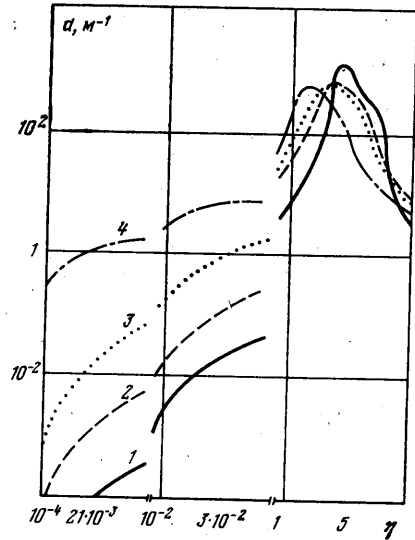
$$\pi_T = 1 - F + 3 \frac{\delta_0}{i\eta\tau_2} \frac{(1-s) [(F-Q)\Pi_2 - \kappa Q(\nu_1+1)\tau_2/\tau_1] - (F-Q)L\Pi_2}{L}$$

$$\pi_T = 1 - F - 3 \frac{\delta_0}{i\eta\tau_2} \frac{\kappa F(\nu_1+1)\Pi_2}{\kappa(\nu_1+1) - \Pi_2\tau_1/\tau_2}$$

Как было отмечено ранее, полученное дисперсное выражение справедливо для таких частот, когда длины температурных волн в жидкости, инициируемых радиальными движениями пузырьков, значительно меньше, чем средние расстояния между



Фиг. 1



Фиг. 2

пузырьками. Для длины температурной волны в жидкости вокруг пузырьков на основании решения (2.2) имеем $\lambda = \pi\delta_0(\delta_0/\eta\tau_1)^{1/2}$. Для среднего расстояния между включениями можно записать $l = \delta_0(\pi/6\alpha_{20})^{1/2}$.

В соответствии с замечанием, приведенным выше, получим следующую оценку для безразмерной частоты возмущений: $\sqrt{\eta} \gg (6\alpha_{20}\pi^2)^{1/2}(\tau_1/\delta_0)^{1/2}$.

Из допущения о том, что длина волны значительно больше, чем среднее расстояние между включениями, следует для частоты возмущений оценка сверху: $\eta \ll 2(6\alpha_{20}\pi^2)^{1/2}A_{10}$.

На основе дисперсного выражения (2.3) были приведены численные расчеты. Сравнение и анализ с результатами работы [1] показывают приемлемость использования фиксированных коэффициентов теплообмена для диапазона частот, при котором имеются температурные пограничные слои около поверхности раздела фаз. Вместе с тем дисперсионное выражение (2.3) позволяет рассчитывать фазовые скорости и коэффициенты затухания для значительно более широкого диапазона частот, отмеченного выше.

На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов фазовой скорости и коэффициента затухания для воды с паровоздушными пузырьками при следующих параметрах смеси: $\alpha_{20} = 0.2 \cdot 10^{-3}$, $p_0 = 2$ бар, $\delta_0 = 10^{-4}$ м. Кривые 1-4 соответствуют следующим значениям T_0 и g_0 : 300, 0.0086; 373, 0.39; 388, 0.8; 398, 1. Все необходимые теплофизические параметры оценивались на основании [7]. Было проанализировано влияние внутреннего и внешнего теплообмена, а также массообмена на затухание и скорость распространения малых возмущений. Такой анализ показал, что при малых паросодержаниях диссипация (значение d) определяется внутренним теплообменом (значением τ_2); с увеличением паросодержания в пузырьках возрастает роль внешнего теплообмена (значения τ_1). В случае чисто паровых пузырьков коэффициент затухания d определяется значением τ_1 . Учет диффузионной неравновесности приводит к дополнительному увеличению диссипации.

Поступила 18 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаганов В. Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками. ПМТФ, 1977, № 1.
2. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
3. Богуславский Ю. Я. О поглощении и дисперсии звуковых волн в двухфазной среде. Акуст. ж., 1978, т. 24, № 1.
4. Акулитчев В. А., Алексеев В. Н. Акустические волны в жидкости с паровыми пузырьками. В сб. «Нелинейн. волнов. процессы в двухфаз. средах». Новосибирск, 1977.
5. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика парогазовых пузырьков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 6.
6. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков. Акуст. ж., 1975, т. 21, вып. 5.
7. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., «Наука», 1972.

УДК 532.546

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛАГИ ВОКРУГ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТРУБЫ ПРИ ПОДПОЧВЕННОМ ОРОШЕНИИ

О. А. КОРОЛЕВА, А. В. КОРОЛЕВ

(Москва)

Одним из возможных и эффективных способов орошения является подача воды в почву с помощью перфорированных труб, проложенных под поверхностью грунта. При проектировании систем подпочвенного орошения часто пользуются эмпирическими зависимостями, достаточно приближенно описывающими процесс влагопереноса [1]. В данной работе распространение влаги от перфорированной трубы представлено дифференциальным уравнением, учитывающим действие капиллярной диффузии и сил гравитации [2]. Уравнение решается конечно-разностным методом с применением локально-одномерной схемы. Процесс увлажнения почвы при различном соотношении капиллярных и гравитационных сил иллюстрируется результатами численных расчетов. Отмечается возможность моделирования поступления воды в грунт в виде точечного источника, что подтверждается и расчетами с использованием предложенного разностного метода.

1. В полярных координатах (r, φ) двумерный перенос влаги при неполном насыщении почвы можно описать уравнением

$$(1.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(D \frac{\partial w}{\partial r} - K \sin \varphi \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} D \frac{\partial w}{\partial \varphi} - K \cos \varphi \right) = 0$$

Здесь w — объемная насыщенность порового пространства водой (влажность), $D(w)$ — коэффициент капиллярной диффузии, $K(w)$ — коэффициент влагопроводности, v — скорость переноса влаги, индексы r и φ определяют соответствующие компоненты скорости, t — время.

Рассматривается истечение воды в однородный грунт из бесконечной перфорированной цилиндрической трубы радиуса r_T при заданном расходе Q с единицы длины трубы, равномерно распределенном по ее поверхности

$$(1.2) \quad v_r = -D \frac{\partial w}{\partial r} + K \sin \varphi = \frac{Q}{2\pi r_T}, \quad r = r_T, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0$$

Начальное распределение влаги в почве определяется $w(r, \varphi, 0) = w_0(r, \varphi)$, $r > r_T$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.