

3. Pearson C. E. Numerical solutions for time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks. J. Fluid Mech. 1965, vol. 21, pt 4.
4. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
5. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1975.
6. Симуни Л. М. Численное исследование явления «блокировки» при обтекании препятствия стратифицированной жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.

УДК 532.529

ОБ ОДНОЙ ЯЧЕЕЧНОЙ МОДЕЛИ СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

А. Г. КВАШНИН

(Кишинев)

Предлагается вариант ячеечной модели для описания суспензии сферических частиц в вязкой жидкости. В отличие от существующих моделей в качестве дополнительного условия на поверхности ячейки выставляется требование достижения минимума касательной составляющей скорости по радиальной координате. Показано, что это требование соответствует физической картине обтекания системы частиц. В результате получено выражение для силы сопротивления частицы в системе и вычислена скорость осаждения суспензий и эмульсий.

Точное описание явлений взаимодействия частиц и капель в суспензиях и эмульсиях связано со значительными трудностями. Поэтому широко распространенным является приближенный подход, суть которого состоит в следующем. Считается, что каждая частица находится в центре гипотетической ячейки, заполненной жидкостью. Форму ячейки для удобства принимают сферической. Все ячейки равномерно заполняют выделенный объем двухфазной среды. Размер ячейки определяется по концентрации частиц.

В результате задача о движении частицы суспензии сводится к решению уравнений Навье — Стокса в области, ограниченной двумя concentрическими сферами. Для полной формулировки соответствующей краевой задачи необходимо задать два граничных условия на внешней поверхности ячейки. Одно из них тривиально вытекает из условия сохранения массы жидкости. Это условие непротекания жидкости через внешнюю поверхность ячейки в системе координат, где жидкость в среднем покоится. Оно же означает, что возмущение, вносимое в поток частицей, локализовано в пределах ячейки. Второе граничное условие по существу определяет характер взаимодействия между частицами. Его постановка требует привлечения некоторых интуитивных соображений. Такие соображения помимо своей нестрогости приводят к неоднозначному результату.

В литературе наибольшее распространение получили ячеечные модели [1, 2]. В модели Хаппеля на внешней поверхности ячейки предполагается отсутствие трения, т. е. касательные напряжения равны нулю. В этом случае скорость жидкости в точке соприкосновения двух соседних ячеек непрерывна, а трение между жидкими оболочками отсутствует. В модели Кувабары в качестве второго условия принимается обращение в нуль вихря скорости на внешней сфере.

Полученные в [1, 2] поля скоростей в ячейке дают возможность получить скорость осаждения частиц суспензии, а также перепад давления при течении жидкости через плотный слой частиц. В [1] сила сопротивления частицы вычислена непосредственно по полю скоростей и давления, а в [2] — через диссипацию энергии в ячейке. При этом вследствие наличия трения на внешней поверхности ячейки определение силы сопротивления каждым из способов в модели [2] дает два разных результата. Чем вызвана диссипация энергии на внешней границе ячейки, автором не объясняется.

В последующих работах [3–6], где использовались указанные подходы, по-прежнему не было обосновано второе граничное условие на внешней сфере и не была объяснена связь между силой сопротивления и диссипацией энергии в ячейке.

В предлагаемой работе дается обоснование выбора второго граничного условия на поверхности ячейки. Построенная ячеечная модель применяется для вычисления силы сопротивления случайно распределенных сферических капель. При этом предполагается, что все капли движутся с одинаковой скоростью. Движение жидкости рассматривается в рамках уравнений Стокса медленного течения несжимаемой вязкой жидкости.

В силу полной равноправности жидких частиц всю область, занятую суспензией, можно разбить на ячейки, каждая из которых содержит одну частицу. Тогда поле течения жидкости можно представить составленным из полей течения внутри ячеек. При равномерном распределении частиц поля течения во всех ячейках одинаковы. Граница ячейки представляет собой некоторую условную поверхность сложной формы. В дальнейших рассуждениях, учитывая случайный характер распределения частиц, будем считать поверхность ячейки сферической. В соответствии с [1, 2] ее радиус b определяем по формуле

$$b = ac^{-1/3}$$

Здесь a — радиус частиц, c — объемная концентрация.

Поскольку поверхности ячейки являются просто условными границами, разделяющими все поле течения на одинаковые области, на них должны выполняться условия равенства касательных скоростей и напряжений жидкости.

Запишем уравнения Стокса для жидкости внутри и вне капель

$$(1) \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \mu^{-1} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

При рассмотрении осесимметричных течений жидкости поля скорости и давления, полученные в рамках уравнений Стокса для области, заключенной между двумя сферами, имеют вид [7]

$$(2) \quad p = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n$$

$$(3) \quad \mathbf{v} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\nabla \times (\mathbf{r} \chi_n) + \nabla \Phi_n + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r^2 \nabla P_n - \mathbf{r} \frac{n P_n}{(n+1)(2n+3)} \right]$$

где P_n , χ_n , Φ_n — сферические гармоники порядка n .

Для двух соприкасающихся ячеек условия равенства касательных скоростей и напряжений в точке касания, записанные в сферических координатах, связанных с центрами частиц, при $r=b$ и любом θ имеют вид (фиг. 1)

$$(4) \quad v_{\theta}^{(1)}(\theta) = v_{\theta}^{(2)}(\pi - \theta)$$

$$(5) \quad p_{r\theta}^{(1)}(\theta) = p_{r\theta}^{(2)}(\pi - \theta)$$

Поскольку поля течения в двух любых ячейках одинаковы, равенства (4) и (5) можно записать через величины, относящиеся к полю течения только в одной ячейке. С учетом отсутствия радиальной скорости на поверхности ячейки

$$(6) \quad v_{\theta}(\theta) = v_{\theta}(\pi - \theta), \quad r = b$$

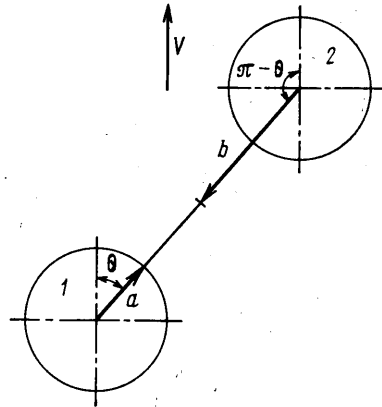
$$(7) \quad \frac{\partial v_{\theta}(\theta)}{\partial r} - \frac{v_{\theta}(\theta)}{r} = - \frac{\partial v_{\theta}(\pi - \theta)}{\partial r} - \frac{v_{\theta}(\pi - \theta)}{r}$$

Последнее равенство с учетом общего решения (3) для v_{θ} и условия (6) можно записать в виде

$$(8) \quad \partial v_{\theta} / \partial r = 0, \quad r = b$$

Условие (8) и будет представлять собой второе граничное условие на поверхности ячейки. Отметим, что в силу вида общего решения (3) уравнений (1) оно одновременно влечет за собой выполнение двух условий (6) и (7), если решение задачи для нахождения v_{θ} обладает симметрией относительно плоскости $\theta = \pi/2$. Последнее следует из вида остальных граничных условий данной краевой задачи. Применительно к движению жидкой частицы со скоростью V они записываются следующим образом:

$$(9) \quad v_r = v_r' = V \cos \theta, \quad v_{\theta} = v_{\theta}', \quad p_{r\theta} = p_{r\theta}', \quad r = a$$



Фиг. 1

Здесь штрихом обозначены величины, относящиеся к полю течения внутри капли.

Для нахождения силы сопротивления, действующей на каплю, достаточно найти только коэффициент P_{-2} [7], так как выражение для силы сопротивления в разложении (2) имеет вид

$$(10) \quad F = -4\pi\mu V (r^3 P_{-2})$$

Здесь μ — вязкость жидкости, обтекающей капли.

Решение рассматриваемой краевой задачи можно получить, если положить $\chi_n = 0$ и оставить только сферические гармоники P_n и Φ_n порядков -2 и $+1$, т. е.

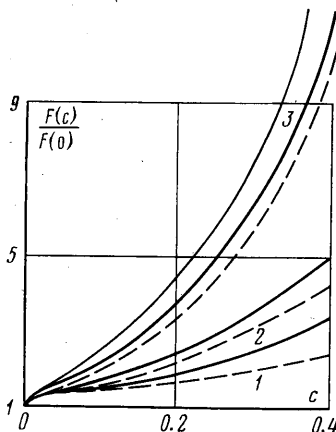
$$(11) \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi_1 + \nabla \Phi_{-2} + \frac{1}{5} r^2 \nabla P_1 - \frac{1}{10} r P_1 + \frac{1}{2} r^2 \nabla P_{-2} + 2r P_{-2}$$

Граничные условия дают четыре независимых соотношения для определения гармоник P_1 , P_{-2} , Φ_1 , Φ_{-2} .

С учетом граничных условий (9) на поверхности частицы необходимо принять

$$(12) \quad P_1 = Ar \cos \theta, \quad \Phi_1 = Br \cos \theta, \quad P_{-2} = Dr^{-2} \cos \theta, \quad \Phi_{-2} = Cr^{-2} \cos \theta$$

После подстановки выражения (11) с учетом (12) в граничные условия можно определить коэффициент D при гармонике P_{-2}



Фиг. 2

(13)

$$D = aV(k + \beta l) / (m + \beta q)$$

$$k = 1 + \frac{5}{24} \gamma^3 - \frac{7}{12} \gamma^5, \quad l = \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \gamma^3 - \frac{1}{4} \gamma^5$$

$$m = 1 - \frac{9}{8} \gamma + \frac{11}{12} \gamma^3 - \frac{45}{48} \gamma^4 - \frac{7}{12} \gamma^5 + \frac{73}{96} \gamma^6 - \frac{1}{32} \gamma^8$$

$$q = 1 + \frac{27}{16} \gamma + \frac{45}{16} \gamma^3 - \frac{45}{16} \gamma^4 + \frac{1}{4} \gamma^5 + \frac{19}{32} \gamma^6 + \frac{5}{32} \gamma^8$$

$$\gamma = C^{1/3}$$

Здесь $\beta = \mu' / \mu$ — отношение вязкостей жидкости внутри и вне капли.

В соответствии с (10)

(14)

$$F = -4\pi\mu a V \frac{k + \beta l}{m + \beta l}$$

модели [1] равно

$$(15) \quad F = -4\pi\mu a V \frac{(1 - \gamma^5) + \beta d}{(1 - \gamma - \gamma^5 + \gamma^6) + \beta S}$$

$$d = \frac{3}{2} + \gamma^5, \quad S = 1 - \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{2} \gamma^5 - \gamma^6$$

При $\beta \rightarrow \infty$, что соответствует твердым частицам, формула (15) переходит в результат [1].

Для модели [2] сила сопротивления, вычисленная по (10), равна

$$(16) \quad F = -2\pi\mu a V \frac{2 + 3\beta}{t + \beta j}$$

$$t = 1 - \frac{14}{15} \gamma - \frac{4}{15} \gamma^3 + \frac{2}{15} \gamma^4 + \frac{1}{15} \gamma^6, \quad j = 1 - \frac{8}{5} \gamma + \frac{4}{5} \gamma^3 + \frac{2}{5} \gamma^4 - \frac{3}{5} \gamma^6$$

При $\beta \rightarrow \infty$ выражение (16) не переходит в результат [2].

Таким образом, в предлагаемой модели выбор определенных граничных условий на поверхности ячейки вытекает единственным образом из общих гидродинамических соображений. Поэтому, несмотря на упрощенное представление ячейки в виде сферы, поле скоростей вне частицы определяется более правильно. Скорости и их производные не имеют разрывов, как в работах [1, 2]. Последнее, в частности, влечет за собой однозначное определение силы сопротивления частицы двумя упомянутыми выше способами.

Следует указать на ошибочность представления [8] о возможности отказа от формулировки второго граничного условия на поверхности ячейки. В отсутствие этого условия задача оказывается поставленной некорректно, одна из констант не может быть определена. Произвольность ее выбора в [8] приводит к формулам, не имеющим физического смысла.

На фиг. 2 приведена зависимость силы сопротивления частицы от концентрации при $\beta=0,1$, ∞ (группы кривых 1, 2, 3 соответственно) для разных моделей: сплошная тонкая линия — модель [2], штриховая линия — сила сопротивления по модели [1], сплошная жирная линия — предлагаемая модель. Видно, что при $\beta=\infty$ она занимает промежуточное положение и при всех β полученная сила сопротивления больше, чем по модели Хэппеля.

Автор благодарит Ю. П. Гупало за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 14 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Happel J. Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particle. A. I. Ch. E. Journal, 1958, vol. 4, No. 2.
2. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres on a viscous flow at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14, No. 4.
3. Marrucci G. Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. Ind. and Engng Chem. Fundament., 1965, vol. 4, No. 2.
4. Gal-Or B. On motion of bubbles and drops. Canad. J. Chem. Engng, 1970, vol. 48, No. 5.
5. Yaron J., Gal-Or B. Relative velocities and pressure drops in clouds of drops, babbles or solid particles. A. I. Ch. Journal, 1971, vol. 17, No. 5.
6. Leclair B. P., Hamielec A. E. Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers — a cell model for transport in bubble swarms. Canad. J. Chem. Engng, 1971, vol. 49, No. 6.
7. Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
8. Бусевич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.

УДК 532.529:534.2.532

УЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОМАСООБМЕНА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ

В. Ш. ШАГАПОВ

(Уфа)

В работе рассматривается распространение малых возмущений в жидкости с парогазовыми пузырьками. Учет тепломассообмена между фазами проводится на основании точных уравнений теплопроводности и диффузии. Цель данного исследования — уточнение результатов работы [1] и проверка приемлемости использования фиксированных коэффициентов теплообмена и массообмена для нестационарного тепломассообмена между пульсирующим пузырьком и жидкостью.

1. Основные уравнения. Рассмотрим распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками при следующих допущениях. Длина волны много больше расстояний между пузырьками, которые, в свою очередь, гораздо больше размеров пузырьков. Смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного диаметра. Вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия, в частности при пульсациях пузырьков. Газовая фаза состоит из двух компонент, а именно из паров жидкой фазы и некоторого «инертного» газа, не участвующего в процессе массообмена между фазами. Скорости фаз совпадают [1] ($v_1=v_2$).

Для рассматриваемой смеси в рамках представленной сплошной среды [2] запишем в линейном приближении дифференциальные уравнения сохранения массы для каждой фазы, числа пузырьков, импульса всей смеси, а также пульсационного движения для одномерного случая

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v}{\partial x} = -I, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v}{\partial x} = I, \quad (\rho_{10} + \rho_{20}) \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial t} = w + \frac{I}{\pi \delta_0^2 n_0 \rho_{10}}, \quad \frac{\delta_0}{2} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{10}} - 8 \frac{v_1}{\delta_0} w \quad (I = \pi n_0 \delta_0' j)$$