

примут вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p, \quad \nabla \mathbf{v}_1 = 0$$

На поверхности пленки при $z=0$ имеем [5]

$$(3.2) \quad \beta_1 w_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p = \left[1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - b \cos \omega t \right] \zeta$$

На дне при $z=-H$, где H — безразмерная толщина слоя

$$(3.3) \quad w_1 = 0$$

Решая уравнение (3.1) с условиями (3.3) и (3.2), получим уравнение для смещения поверхности от положения равновесия

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \beta_1 \operatorname{th} kH (\Omega_0^2 - b \cos \omega t) \zeta = 0$$

Отсюда следует, что на поверхности возникают волны при выполнении условия

$$(3.5) \quad \Omega_0^2 \beta_1 \operatorname{th} kH = \omega^2 / 4$$

При $kH \gg 1$ выражение (3.5) совпадает с (2.15).

В заключение этой благодарит Н. А. Леонтовича, который обратил его внимание на эту задачу, Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за обсуждение результатов, В. А. Брискмана за постоянное внимание и поддержку.

Поступила 6 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Эксперимент, теория, практика. М., «Наука», 1974.
2. Ландау Л. Д. Теория сверхтекучести гелия — II. ЖЭТФ, 1941, т. 11, № 6.
3. Ландау Л. Д. К гидродинамике гелия II. ЖЭТФ, 1944, т. 14, № 1.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, гл. 16. М., Гостехиздат, 1953.
5. Халагников И. М. Теория сверхтекучести, гл. 5, 6. М., «Наука», 1971.
6. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1974.
7. Benjamin T. B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1954, vol. 225, No. 1163.
8. Брискман В. А., Неволин В. Г., Шайдуров Г. Ф. Параметрическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях. Уральская конференция по применению магнитной гидродинамики в металлургии. Тез. докл., вып. 2. Пермь, 1974.

УДК 532.526.75

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ВРАЩЕНИЕМ ДИСКА КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Л. М. СИМУНИ

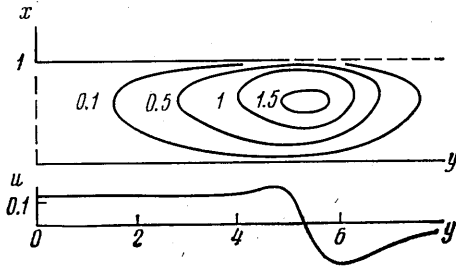
(Ленинград)

Задача о движении вязкой жидкости между двумя неограниченными пластинами, вращающимися вокруг общей оси, впервые была рассмотрена в [1]. В дальнейшем исследование этой задачи проводилось в [2, 3] и других работах. Подробная библиография работ, посвященных этому вопросу, содержится в [4, 5]. Исследовались вызываемые вращением пластин автомодельные движения. В случае вращения диска конечного размера автомодельное движение справедливо лишь в некоторой области в окрестности оси вращения. Кроме того, оказывается, что если диск конечного радиуса вращается в жидкости, имеющей собственное вращение, возникающее движение существенно отличается от движения, возбуждаемого вращающимся диском в покоящейся жидкости.

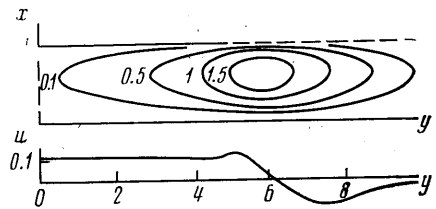
В данной работе исследуется осесимметричное движение, вызываемое вращением диска конечного радиуса на поверхности жидкости. Рассматривается цилиндри-

ческий сосуд радиуса R_1 и высоты h , заполненный вязкой несжимаемой жидкостью. На поверхности жидкости расположен диск радиуса R_2 , причем центр диска находится на оси цилиндра. Свободная поверхность жидкости ($z=h$, $R_2 < r < R_1$) считается горизонтальной и фиксированной в пространстве. Как сосуд, так и диск могут вращаться вокруг оси с различными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . На твердых границах принимаем условие прилипания, на свободной поверхности $u=0$, $\partial v/\partial z=0$, $\partial w/\partial z=0$, а на оси вращения $\partial u/\partial r=0$, $v=0$, $w=0$, где v , u , w — соответственно радиальная, осевая и окружная составляющие скорости.

За характерный размер примем высоту цилиндра h , за характерную угловую скорость — разность угловых скоростей диска и цилиндра $\omega_2 - \omega_1$, тогда число Рейнольдса примет вид $Re = (\omega_2 - \omega_1) h^2 \nu^{-1}$. Кроме геометрических характеристик и числа Рейнольдса движение определяется отношением угловых скоростей $\gamma = \omega_2/\omega_1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Переходя в системе уравнений Навье — Стокса к безразмерным переменным и вводя функцию тока ψ и завихренность ξ , получим систему

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{Re}{y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\xi}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\
 & = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\xi}{y^2} \\
 (1) \quad & \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{Re}{y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\
 & = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{y^2}, \quad \xi = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

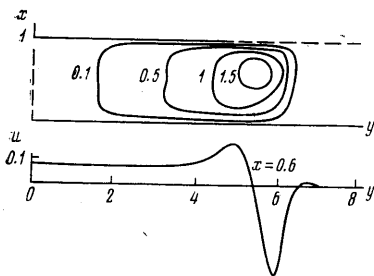
В системе (1) $x=z/h$, $y=r/h$, $\tau=tv/h^2$. Для безразмерных скоростей сохранены прежние обозначения.

Задача решается численно методом конечных разностей аналогично тому, как это сделано в [6]. Для функции тока принимается граничное условие типа условия Тома. На оси вращения и на свободной поверхности завихренность равна нулю. В дальнейшем излагаются стационарные результаты, полученные в результате установления достаточно больших значений величины τ .

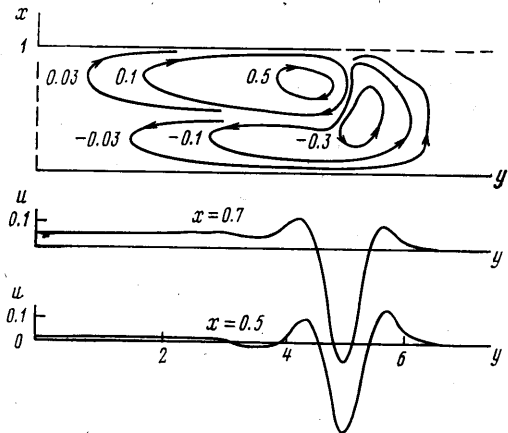
Чтобы исключить влияние боковых стенок, следует взять достаточно большой величину R_1/R_2 . В рассмотренных примерах принималось $R_2/h=5$, $R_1/h=18$. Как показали расчеты, при этом боковые стенки не влияют на движение вблизи диска. На фиг. 1, 2 для $Re=20$ и 50 соответственно показаны линии тока меридионального сечения и безразмерные осевые скорости на горизонте $z/h=0.6$ в случае, когда собственное вращение цилиндра отсутствует ($\omega_1=0$). Видно, что образуется циркуляционное течение, причем при $y < R_2/h$ движение близко к автомодельному движению, характеризующемуся, как известно, условием $\psi = \omega_2 h f(z/h)$, $w = \omega_2 r G(z/h)$. При $y > R_2/h$ осуществляется опускание жидкости, причем область, захваченная циркуляцией, увеличивается при увеличении числа Рейнольдса. В данных случаях в жидкости нет резко выраженных внутренних пограничных слоев и область отрицательных осевых скоростей захватывает значительный объем жидкости.

На фиг. 3 показаны результаты, полученные в случае, когда цилиндрический сосуд имеет собственное вращение, для того же числа Рейнольдса, что и на фиг. 2. Видно, что наличие основного вращения приводит к тому, что у границы диска образуется резко выраженный внутренний пограничный слой, через который жидкость,

поднимающаяся в ядре, опускается к основанию сосуда. В самом ядре по-прежнему осуществляется автомодельное движение. При меньших числах Рейнольдса этот внутренний пограничный слой менее резко выражен. При наличии основного вращения формируется режим с пограничными слоями на верхней и нижней границах. Эти пограничные слои формируются и без основного вращения, но при больших числах Рейнольдса. Наличие основного вращения приводит к тому, что радиальные скорости для всех рассмотренных чисел Рейнольдса заметно отличны от нуля только в пограничных слоях на верхней и нижней поверхностях. Изложенные результаты показывают, как в случае конечных чисел Рейнольдса реализуется теорема Праудмана о двумерных движениях вращающейся жидкости. В дальнейшем будем анализи-



Фиг. 3



Фиг. 4

ровать случаи, когда цилиндр имеет собственное вращение, и удобно ввести в качестве числа Рейнольдса величину $Re_1 = \omega_1 h^2 / \nu$.

Рассмотрим характер возникающего движения в зависимости от соотношения угловых скоростей. В случае, когда $\omega_2 / \omega_1 > 1$, движение имеет ту же основную структуру, что изображена на фиг. 1–3. Жидкость поднимается вблизи оси и опускается во внешней части. Интенсификация вращения диска при фиксированном вращении сосуда приводит к увеличению осевой скорости. Одновременно происходит уменьшение области, в которой справедливы автомодельные решения и для которых осевая скорость постоянна. Внутренний пограничный слой также утолщается.

В случае $-0.5 \leq \omega_2 / \omega_1 < 1$ движение имеет другой характер. Вблизи оси жидкость опускается, а во внутреннем вертикальном слое у края диска поднимается. Остальная часть жидкости находится практически в покое.

В случае небольших отрицательных значений величины ω_2 / ω_1 ($-0.5 < \omega_2 / \omega_1 < 0$) осуществлялось одноячейное движение, имеющее, однако, некоторые особенности. У диска, в области, прилегающей к оси, формируется зона малых скоростей, и основное движение как поднимающейся, так и опускающейся жидкости происходит у края диска. Область, в которой справедливо автомодельное решение, уменьшается по сравнению со случаем вращения дисков в одну сторону.

В случае, если $\omega_2 / \omega_1 \leq -0.6$, формируется двуячейная картина течения, линии тока которой изображены на фиг. 4. На этой же фигуре показаны профили осевой скорости в некоторых сечениях ($Re_1 = 20$, $\gamma = -1$). Движение при этом имеет сложный характер. Заметим, что угловая скорость изменяется по высоте цилиндра по закону, близкому к линейному. Однако внутри жидкости существует резко выраженный внутренний слой, в котором происходит изменение угловой скорости от постоянной для данного значения z/h до угловой скорости вращения сосуда. При дальнейшем уменьшении значения величины ω_2 / ω_1 область течения, возникшая у диска, распространяется на всю глубину.

Поступила 12 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951, vol. 4, pt 1.
2. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks. Proc. Camb. Philos. Soc., 1935, vol. 49, No. 2.

3. Pearson C. E. Numerical solutions for time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks. J. Fluid Mech. 1965, vol. 21, pt 4.
4. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
5. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеоздат, 1975.
6. Симуни Л. М. Численное исследование явления «блокировки» при обтекании препятствия стратифицированной жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.

УДК 532.529

ОБ ОДНОЙ ЯЧЕЕЧНОЙ МОДЕЛИ СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

А. Г. КВАШНИН

(Кишинев)

Предлагается вариант ячеечной модели для описания суспензии сферических частиц в вязкой жидкости. В отличие от существующих моделей в качестве дополнительного условия на поверхности ячейки выставляется требование достижения минимума касательной составляющей скорости по радиальной координате. Показано, что это требование соответствует физической картине обтекания системы частиц. В результате получено выражение для силы сопротивления частицы в системе и вычислена скорость осаждения суспензий и эмульсий.

Точное описание явлений взаимодействия частиц и капель в суспензиях и эмульсиях связано со значительными трудностями. Поэтому широко распространенным является приближенный подход, суть которого состоит в следующем. Считается, что каждая частица находится в центре гипотетической ячейки, заполненной жидкостью. Форму ячейки для удобства принимают сферической. Все ячейки равномерно заполняют выделенный объем двухфазной среды. Размер ячейки определяется по концентрации частиц.

В результате задача о движении частицы суспензии сводится к решению уравнений Навье — Стокса в области, ограниченной двумя концентрическими сферами. Для полной формулировки соответствующей краевой задачи необходимо задать два граничных условия на внешней поверхности ячейки. Одно из них тривиально вытекает из условия сохранения массы жидкости. Это условие непротекания жидкости через внешнюю поверхность ячейки в системе координат, где жидкость в среднем покоится. Оно же означает, что возмущение, вносимое в поток частицей, локализовано в пределах ячейки. Второе граничное условие по существу определяет характер взаимодействия между частицами. Его постановка требует привлечения некоторых интуитивных соображений. Такие соображения помимо своей нестрогости приводят к неоднозначному результату.

В литературе наибольшее распространение получили ячеечные модели [1, 2]. В модели Хапеля на внешней поверхности ячейки предполагается отсутствие трения, т. е. касательные напряжения равны нулю. В этом случае скорость жидкости в точке соприкосновения двух соседних ячеек непрерывна, а трение между жидкими оболочками отсутствует. В модели Кувабары в качестве второго условия принимается обращение в нуль вихря скорости на внешней сфере.

Полученные в [1, 2] поля скоростей в ячейке дают возможность получить скорость осаждения частиц суспензии, а также перепад давления при течении жидкости через плотный слой частиц. В [1] сила сопротивления частицы вычислена непосредственно по полю скоростей и давления, а в [2] — через диссипацию энергии в ячейке. При этом вследствие наличия трения на внешней поверхности ячейки определение силы сопротивления каждым из способов в модели [2] дает два разных результата. Чем вызвана диссипация энергии на внешней границе ячейки, автором не объясняется.

В последующих работах [3-6], где использовались указанные подходы, по-прежнему не было обосновано второе граничное условие на внешней сфере и не была объяснена связь между силой сопротивления и диссипацией энергии в ячейке.

В предлагаемой работе дается обоснование выбора второго граничного условия на поверхности ячейки. Построенная ячеечная модель применяется для вычисления силы сопротивления случайно распределенных сферических капель. При этом предполагается, что все капли движутся с одинаковой скоростью. Движение жидкости рассматривается в рамках уравнений Стокса медленного течения несжимаемой вязкой жидкости.