ЛИТЕРАТУРА

1. *Yih Chia-shun.* Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Устойчивость течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5.)
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
3. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Marschall E., Lee C. Y.* Stability characteristics of condensate films. Wärme-und Stoffübertragung, 1973, Bd 6, Nr 1.
5. *Lin S. P.* Stability of liquid flow down a heated inclined plane. Lett. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 2, No. 5.

УДК 532.5.013.4

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕЛИЯ II

В. Г. НЕВОЛИН

(Пермь)

В данной работе в рамках двухжидкостной гидродинамики рассматривается устойчивость свободной поверхности сверхтекучей жидкости в переменном поле тяжести. Задача решается в линейной постановке методом преобразования Лапласа. Для смещения поверхности от положения равновесия получено интегродифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, решение которого ищется методом усреднения [6]. Показано, что возбуждение носит пороговый характер. Получены оценки для порога возбуждения.

При понижении температуры ниже 2.19° К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние (гелий II). При этом в нем возможно существование одновременно двух движений, каждое из которых связано со своей эффективной массой, так что сумма этих масс равна полной истинной массе жидкости. Одно из этих движений нормальное, т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной вязкой жидкости, другое сверхтекучее. В случае малых скоростей эти движения происходят без передачи импульса от одного другому [1–5].

Таким образом, задача о движении гелия II сводится к решению двух задач обычной гидродинамики – для идеальной и вязкой жидкостей [2–5].

1. Рассматривается горизонтальный слой несжимаемой сверхтекучей жидкости со свободной верхней границей. Слой движется около вертикальной оси с частотой ω по закону $a\cos\omega t$, причем амплитуда модуляции $a<1$. Декартова система координат выбрана так, что плоскость xy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, ось z направлена вертикально. В предположении малых скоростей движения жидкости нормальное и сверхтекучее движения разделяются и уравнения движения примут вид [2–5]

$$\rho_1\nabla\left[\frac{\mathbf{v}_1^2}{2}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right]+\rho_2\left[\frac{\partial\mathbf{v}_2}{\partial t}+(\mathbf{v}_2\nabla)\mathbf{v}_2\right]=-\nabla p+\eta\nabla^2\mathbf{v}_2+\rho\mathbf{g}(t) \tag{1.1}$$

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \mathbf{v}_1=\nabla\varphi_1,\quad \nabla\mathbf{v}_2=0$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 – сверхтекучая и нормальная плотности; $\rho=\rho_1+\rho_2$ – полная истинная плотность жидкости; $\mathbf{v}=\{u,\ v,\ w\}$ – скорость сверхтекучего движения (индекс 1) и нормального движения (индекс 2); η – коэффициент динамической вязкости; φ – потенциал скорости; $\mathbf{g}(t)=\{0,\ 0,\ -(1-b\cos\omega t)g\}$ – эффективное ускорение силы тяжести, $b=a\omega^2/g$ – безразмерная амплитуда модуляции, $\nabla=\{\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z\}$.

Условия равновесия системы запишутся

$$\mathbf{v}_1^0=0,\quad \mathbf{v}_2^0=0,\quad p^0=-\rho(1-b\cos\omega t)gz \tag{1.2}$$

Здесь давление p отсчитывается от значения на поверхности.

2. Исследуем устойчивость равновесия (1.2) методом малых возмущений. Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости и давления соответственно $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, $(\alpha/\rho g^3)^{1/4}$, $(\rho g^3/\alpha)^{1/4}$, $(\alpha g/\rho)^{1/4}$ и $(\alpha\rho g)^{1/2}$, получим для возмуще-

ний следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t}+\frac{\beta_1}{\beta_2}\nabla\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=-\frac{1}{\beta_2}\nabla p+\frac{1}{A}\nabla^2\mathbf{v}_2$$

(2.1) $$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \nabla\mathbf{v}_2=0,\quad \mathbf{v}_1=\nabla\varphi_1$$

$$A\equiv\frac{\rho_2}{\eta}\left(\frac{\alpha^3}{\rho^3 g}\right)^{1/4},\quad \beta_i=\frac{\rho_j}{\rho},\quad (j=1,2)$$

Введя вспомогательные величины – давления сверхтекучего и нормального течений – p_1 и p_2 по правилу [3, 4]

(2.2) $$p=p_1+p_2,\quad p_1=-\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$$

вместо (2.1) получим

(2.3) $$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t}=-\frac{1}{\beta_2}\nabla p_2+\frac{1}{A}\nabla^2\mathbf{v}_2,\quad \nabla\mathbf{v}_2=0,\quad \nabla^2\varphi_1=0$$

Считая смещение поверхности от положения равновесия ζ малым, при $z=0$ имеем [4, 5]

$$\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\beta_2 w_2=\frac{\partial\zeta}{\partial t},\quad w_2=\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

(2.4) $$\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial y}=0$$

$$p=\left[1-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-b\cos\omega t\right]\zeta+\frac{2\beta_2}{A}\frac{\partial w_2}{\partial z}$$

Для простоты будем рассматривать слой бесконечной глубины, тогда при $z\to-\infty$, $\mathbf{v}\to 0$.

Наличие трансляционной симметрии позволяет искать решение в виде

(2.5) $$\begin{Bmatrix}\mathbf{v}(x,y,z,t)\\ p(x,y,z,t)\\ \zeta(x,y,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{v}(z,t)\\ p(z,t)\\ \zeta(t)\end{Bmatrix}\exp(ik_x x+ik_y y)$$

где $\mathbf{k}=\{k_x, k_y\}$ – волновой вектор.

Полагая, что смещение поверхности и скорость движения жидкости в начальный момент времени равны нулю, совершив преобразование Лапласа по времени и исключая давление, вместо (2.3), (2.4) с учетом (2.2) и (2.5) получим

(2.6) $$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2W_2(s)-As\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)W_2(s)=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\Phi_1(s)=0$$

При $z=0$ имеем

$$\beta_2W_2(s)+\beta_1\frac{d\Phi_1(s)}{dz}=sZ(s),\quad W_2(s)=sZ(s)$$

(2.7)

$$\frac{d^2W_2(s)}{dz^2}+k^2W_2(s)=0$$

$$(2.8)\qquad \frac{\beta_2}{k}\left[s-\frac{1}{A}\left(\frac{d^2}{dz^2}-3k^2\right)\right]\frac{dW_2(s)}{dz}+\beta_1 ks\Phi_1(s)+(k^3+k)Z(s)-$$

$$-\frac{bk}{2}[Z(s+i\omega)+Z(s-i\omega)]=0$$

При $z\to-\infty$

$$(2.9)\qquad \Phi_1(s)\to 0,\quad W_2(s)\to 0$$

Здесь $k^2\equiv k_x^2+k_y^2$; $W(s)$, $\Phi(s)$, $Z(s)$ – трансформанты Лапласа величин $w(t)$, $\varphi(t)$, $\zeta(t)$; s – параметр преобразования Лапласа.

Решая систему уравнений (2.6) с условиями (2.7) и (2.9), найдем

$$(2.10)\qquad W_2(s)=\left(s+\frac{2k^2}{A}\right)Z(s)e^{kz}-\frac{2k^2}{A}Z(s)e^{\sqrt{k^2+As}\,z},$$

$$\Phi_1(s)=\frac{sZ(s)}{k}e^{kz}$$

Подставляя (2.10) в условие (2.8) и совершив обратное преобразование Лапласа для $\zeta(t)$ получим

$$(2.11)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2}+2\delta\beta_2\frac{d\zeta}{dt}+(\Omega_0^2+\beta_2\delta^2-bk\cos\omega t)\zeta-$$

$$-\delta^2\beta_2\int\limits_0^t\left\{\frac{e^{-\delta\tau/2}}{\sqrt{\pi\delta\tau/2}}-\operatorname{erfc}\sqrt{\delta\tau/2}\right\}\frac{d\zeta(t-\tau)}{dt}d\tau=0$$

$$\delta\equiv 2k^2/A,\qquad \Omega_0^2\equiv k^3+k\qquad \operatorname{erfc}x\equiv\int\limits_x^\infty e^{-y}\,dy$$

Учитывая зависимость ρ_1 и ρ_2 от температуры [2, 5], получаем, что при $T=0^\circ$ K (2.11) переходит в уравнение для параметрических волн на поверхности идеальной жидкости [7], а при $T\geqslant T_\lambda$, где T_λ – температура λ-точки,– в уравнение для волн на поверхности вязкой жидкости [8].

Решая уравнение (2.11) методом усреднения [6] вблизи основного резонанса, для границ первой области неустойчивости с точностью до $1/A^{3/2}$ получим

$$(2.12)\qquad \frac{b^2k^2/4\omega^2}{\beta_2^2[\delta-(\delta^3/2\omega)^{1/2}]^2}-\frac{[\Omega_0^2-\omega^2/4-(\delta^3\omega/2)^{1/2}]^2}{\omega\beta_2^2[\delta-(\delta^3/2\omega)^{1/2}]^2}=1$$

Уравнение (2.12) – уравнение гиперболы – характеризует смещение границ области неустойчивости и величину этого смещения в зависимости от вязкости жидкости. Из (2.12) следует, что возбуждение волн на поверхности происходит при

$$(2.13)\qquad b\geqslant b_*=\frac{2\omega\beta_2\delta}{k}[1-(\delta/2\omega)^{1/2}]$$

При этом колебание осуществляется с волновым числом k и частотой $\omega/2$.

Волновые числа наиболее легко возбуждаемых поверхностных волн k_* найдутся из условия $\partial b/\partial k=0$, откуда для порога возбуждения наиболее опасных поверхностных волн получим

$$(2.14)\qquad b_*(k_*)=4\omega\beta_2k_*[1-k_*/\sqrt{A\omega}]/A$$

$$(2.15)\qquad k_*^3+k_*=\omega^2/4$$

Оценка показывает, что при частоте возбуждения ~10 *гц*, температуре 1.5° K и амплитудах модуляции ~0.01 *см* на поверхности жидкости возникают волны.

3. В случае пленки гелия толщиной h, когда $h\ll\sqrt{2\eta/\omega\rho_2}$, нормальная часть гелия не участвует в колебательном движении. Тогда уравнения движения упростятся и

примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p, \qquad \nabla \mathbf{v}_1 = 0 \tag{3.1}$$

На поверхности пленки при $z=0$ имеем [5]

$$\beta_1 w_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \qquad p = \left[1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - b \cos \omega t\right] \zeta \tag{3.2}$$

На дне при $z=-H$, где H – безразмерная толщина слоя

$$w_1 = 0 \tag{3.3}$$

Решая уравнение (3.1) с условиями (3.3) и (3.2), получим уравнение для смещения поверхности от положения равновесия

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \beta_1 \operatorname{th} kH (\Omega_0^2 - bk \cos \omega t) \zeta = 0 \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что на поверхности возникают волны при выполнении условия

$$\Omega_0^2 \beta_1 \operatorname{th} kH = \omega^2/4 \tag{3.5}$$

При $kH \gg 1$ выражение (3.5) совпадает с (2.15).

В заключение автор благодарит Н. А. Леонтовича, который обратил его внимание на эту задачу, Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за обсуждение результатов, В. А. Брискмана за постоянное внимание и поддержку.

Поступила 6 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капица П. Л.* Эксперимент, теория, практика. М., «Наука», 1974.
2. *Ландау Л. Д.* Теория сверхтекучести гелия –II. ЖЭТФ, 1941, т. 11, № 6.
3. *Ландау Л. Д.* К гидродинамике гелия II. ЖЭТФ, 1944, т. 14, № 1.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред, гл. 16. М., Гостехиздат, 1953.
5. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести, гл. 5, 6. М., «Наука», 1971.
6. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1974.
7. *Benjamin T. B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1954, vol. 225, No. 1163.
8. *Брискман В. А., Неволин В. Г., Шайдуров Г. Ф.* Параметрическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях. Уральская конференция по применению магнитной гидродинамики в металлургии. Тез. докл., вып. 2. Пермь, 1974.

УДК 532.526.75

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ВРАЩЕНИЕМ ДИСКА КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Л. М. СИМУНИ

(Ленинград)

Задача о движении вязкой жидкости между двумя неограниченными пластинами, вращающимися вокруг общей оси, впервые была рассмотрена в [1]. В дальнейшем исследование этой задачи проводилось в [2, 3] и других работах. Подробная библиография работ, посвященных этому вопросу, содержится в [4, 5]. Исследовались вызываемые вращением пластин автомодельные движения. В случае вращения диска конечного размера автомодельное движение справедливо лишь в некоторой области в окрестности оси вращения. Кроме того, оказывается, что если диск конечного радиуса вращается в жидкости, имеющей собственное вращение, возникающее движение существенно отличается от движения, возбуждаемого вращающимся диском в покоящейся жидкости.

В данной работе исследуется осесимметричное движение, вызываемое вращением диска конечного радиуса на поверхности жидкости. Рассматривается цилиндри-