величине, причем возрастает разность между минимальным и максимальным значениями давления. При $\alpha=5°$ минимум давления соответствует местной сверхзвуковой зоне течения, а максимальное значение находится в дозвуковой части течения. При увеличении угла атаки местная сверхзвуковая зона сливается со сверхзвуковой частью течения, и при $\alpha=6°$ локальные минимальное и максимальное значения давления на ударной волне лежат в сверхзвуковой области течения.

Возникновение локальных минимума и максимума давления еще при дозвуковом режиме течения и плавное изменение давления от минимального до максимального значения при наличии местной сверхзвуковой зоны позволяет сделать вывод, что поток в местной сверхзвуковой зоне тормозится непрерывно до дозвуковых скоростей без образования скачка уплотнения. Непрерывность течения подтверждается гладким поведением газодинамических функций вдоль лучей, нормальных к поверхности тела и пересекающих местные сверхзвуковые зоны.

Таким образом, при трехмерном обтекании затупленных конусов возникают местные сверхзвуковые зоны на подветренной стороне течения около ударной волны и сверхзвуковое течение в местной зоне непрерывно переходит в дозвуковое течение без образования скачка уплотнения.

В заключение авторы благодарят Г. И. Петрова за постановку задачи и полезные советы и О. М. Белоцерковского за постоянное внимание к работе.

Поступила 28 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базжин А. П., Пирогова С. В.* Алгоритм расчета трехмерных смешанных течений газа. Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1604.
2. *Голомазов М. М., Зюзин А. П.* Об одном численном методе расчета пространственного обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 5.

УДК 532.5.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

С. М. АЛЕЙНИКОВ

(Воронеж)

Рассматривается устойчивость неизотермического течения слоя вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости под действием силы тяжести с учетом диссипации энергии в потоке. Принимается, что жидкость несжимаема, а ее физические свойства не зависят от температуры. На свободной поверхности слоя учитываются эффекты испарения и конденсации. Рассмотрение ведется в длинноволновом приближении методом, предложенным в [1]. Полученное выражение для критического числа Рейнольдса, при котором течение теряет устойчивость, указывает на дестабилизирующую роль вязкой диссипации в неизотермическом потоке.

Пусть слой вязкой жидкости толщиной d стекает под действием силы тяжести по охлаждаемой или подогреваемой плоскости, наклоненной к горизонту под углом β. Выберем неподвижную систему координат с началом на свободной поверхности слоя. Ось X направим вдоль, а Y — в глубь потока и будем предполагать, что в невозмущенном состоянии все характеристики течения являются функциями только координаты Y.

Для рассматриваемого стационарного течения в выбранной системе координат уравнения Навье — Стокса и граничные условия примут вид

$$\rho g \sin\beta+\mu d^2V/dY^2=0$$

$$dp/dY=\rho g\cos\beta$$

$$dV/dY=0,\qquad Y=0,\qquad V=0,\qquad Y=d$$

После интегрирования найдем профиль скорости основного течения [1]

(1) $$U(y)=\frac{3}{2}(1-y^2)$$

$$U=V/V_0,\qquad y=Y/d,\qquad V_0=gd^2\sin\beta/3\nu$$

Здесь V_0 – средняя скорость невозмущенного потока, ρ – плотность, g – ускорение силы тяжести, μ – коэффициент динамической вязкости, $\nu=\mu/\rho$.

Уравнение и граничные условия для температуры при отсутствии теплопроводности вдоль потока имеют вид

$$\lambda\frac{d^2T}{dY^2}+\mu\left(\frac{dV}{dY}\right)^2=0$$

$$T=T_S,\quad Y=0,\quad T=T_W;\quad Y=d$$

Его решение с учетом (1) представимо в виде [2]

(2) $$\theta=y+{}^3/_4\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\,y(1-y^3),\qquad \theta=(T-T_S)/(T_W-T_S)$$

Здесь $\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda$ – число Прандтля, $\mathrm{Ec}=V_0^2/c_p\Delta T$ – число Эккерта, $\Delta T=T_W-T_S$, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость жидкости.

Из (2) следует, что при $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}={}^4/_9$

$$(dT/dY)_{Y=d}=0$$

Таким образом, если $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}<{}^4/_9$, то тепло переходит от стенки к жидкости, и происходит ее охлаждение; если же $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}>{}^4/_9$, то происходит ее нагревание. Соотношение (2) показывает также, что учет вязкой диссипации приводит к появлению в распределении температуры полинома четвертой степени.

Следуя линейной теории устойчивости [3], рассмотрим нестационарные двумерные течения, близкие к основному течению, представив параметры течения в форме

$$q(x,y,\tau)=q^\circ(y)+q'(x,y,\tau)$$

$$q'(x,y,\tau)=Q(y)\exp[i\alpha(x-c\tau)]$$

где q' – малое возмущение параметра q°.

Здесь Q – комплексная амплитуда, $c=c_r+ic_i$ – комплексная скорость возмущений, α – волновое число, $x=X/d$, $\tau=tV_0/d$.

Линеаризованные уравнения возмущенного течения и энергии в безразмерных переменных имеют вид

(3) $$\varphi''''-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha\,\mathrm{Re}\,[(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi]$$

(4) $$F''-\alpha^2F=i\alpha\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,[F(U-c)-\theta'\varphi]-2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\,U'(\varphi''+\alpha^2\varphi)$$

Здесь $\varphi(y)$ и $F(y)$ – комплексные амплитуды возмущений безразмерных функций тока и температуры в жидкости соответственно, $\mathrm{Re}=V_0d/\nu$ – число Рейнольдса, штрих – дифференцирование по y.

Возмущенные величины будут удовлетворять следующим граничным условиям [1, 4, 5] на твердой стенке:

(5) $$\varphi(1)=\varphi'(1)=F(1)=0$$

Отсутствие касательных напряжений и непрерывность нормальных напряжений на поверхности возмущенного потока приводят к условиям:

(6) $$\varphi''(0)+(\alpha^2-3/c')\varphi(0)=0,\qquad c'=c-{}^3/_2$$

(7) $$i\varphi'''(0)\pm2\alpha\frac{N}{\mathrm{Re}}F'(0)-\alpha(\mathrm{Re}\,c'+3\alpha i)\varphi'(0)-\frac{\alpha}{c'}(3\,\mathrm{ctg}\,\beta+\alpha^2S\,\mathrm{Re})\varphi(0)=0$$

Здесь $S=\sigma/\rho V_0^2d$; σ – коэффициент поверхностного натяжения, $N=(c_p\Delta T/\mathrm{Pr}\,h)^2\times\rho/\rho_g$ – безразмерный параметр, характеризующий испарение или конденсацию, h – скрытая теплота, ρ_g – плотность паров, верхний или нижний знак в условии (7) относится к случаю испарения или конденсации соответственно.

Будем считать, что температура свободной поверхности равна постоянной температуре насыщения T_S, что приведет к условию

(8) $$F(0)+\theta'(0)\varphi(0)/c'=0$$

Ищем решение системы уравнений (3), (4) с граничными условиями (5) – (8) методом разложения всех характерных параметров задачи по степеням α [1, 4, 5]

$$\varphi=\varphi_0+\alpha\varphi_1+\ldots,\quad F=F_0+\alpha F_1+\ldots,\quad c=c_0+\alpha c_1+\ldots \tag{9}$$

что соответствует случаю длинноволновых возмущений.

Для нулевого приближения система уравнений и граничных условий примет вид

$$\varphi_0''''(y)=0,\quad F_0''(y)=-2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\,U'(y)\varphi_0''(y) \tag{10}$$

$$\varphi_0(1)=\varphi_0'(1)=F_0(1)=0$$

$$\varphi_0''(0)-3\varphi_0(0)/c_0'=0,\quad \varphi_0'''(0)=0 \tag{11}$$

$$F_0(0)+\theta'(0)\varphi_0(0)/c_0'=0$$

Интегрируя уравнения (10) с учетом (11), находим

$$\varphi_0(y)=(1-y)^2,\quad c_0=3$$

$$F_0(y)=\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}(2y^3-{}^3/_2y-1)+{}^2/_3y-{}^2/_3$$

Таким образом, нулевое приближение соответствует чисто гидродинамическому случаю без учета тепловых процессов [1].

Система уравнений и граничных условий для первого приближения имеет вид

$$\varphi_1''''=i\,\mathrm{Re}[(U-c_0)\varphi_0''-U''\varphi_0] \tag{12}$$

$$F_1''=i\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}[F_0(U-c_0)-\theta'\varphi_0]-2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\,U'\varphi_1''$$

$$\varphi_1(1)=\varphi_1'(1)=F_1(1)=0 \tag{13}$$

$$\varphi_1''(0)-\frac{3}{c'}\varphi_1(0)+\frac{3c_1'}{c_0'}\varphi_0(0)=0$$

$$i\varphi_1'''(0)\pm\frac{NF_0'(0)}{\mathrm{Re}}-\mathrm{Re}\,c_0'\varphi_0'(0)-\frac{1}{c_0'}(3\,\mathrm{ctg}\,\beta+\alpha^2S\,\mathrm{Re})=0$$

$$F_1(0)+\frac{\theta'(0)}{c_0'}\left(\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\frac{c_1}{c_0'}\right)=0$$

Интегрируя уравнения (12) с учетом граничных условий (13), получаем для c_1 выражение

$$c_1=i\frac{6}{5}\mathrm{Re}\pm i\frac{N}{\mathrm{Re}}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\right)-\frac{i}{3}(3\,\mathrm{ctg}\,\beta+\alpha^2S\,\mathrm{Re})$$

Ограничиваясь двумя приближениями и учитывая, что, согласно (9), $ic_i=\alpha c_1$, для определения критического числа Рейнольдса Re_* получаем уравнение

$$\frac{6}{5}\mathrm{Re}-\mathrm{ctg}\,\beta\pm\frac{N}{\mathrm{Re}}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\right)=0 \tag{14}$$

Из (14) следует, что если $N=0$ или $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}={}^4/_9$, то $\mathrm{Re}_*={}^5/_6\,\mathrm{ctg}\,\beta$ – результат, известный для изотермического течения [1].

В общем случае

$$\mathrm{Re}_*={}^5/_{12}\{\mathrm{ctg}\,\beta+[\mathrm{ctg}^2\beta\mp{}^{16}/_5N(1-{}^9/_4\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec})]^{1/2}\} \tag{15}$$

Так как при испарении $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}<{}^4/_9$, а при конденсации $\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}>{}^4/_9$, то, как следует из (15), в обоих случаях $\mathrm{Re}_*<{}^5/_6\,\mathrm{ctg}\,\beta$ и рассматриваемое неизотермическое течение менее устойчиво, чем чисто гидродинамическое. Если же вязкой диссипацией можно пренебречь, то в соответствии с [5] конденсация стабилизирует, а испарение дестабилизирует неизотермический поток.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yih Chia-shun.* Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Устойчивость течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5.)
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
3. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Marschall E., Lee C. Y.* Stability characteristics of condensate films. Wärme-und Stoffübertragung, 1973, Bd 6, Nr 1.
5. *Lin S. P.* Stability of liquid flow down a heated inclined plane. Lett. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 2, No. 5.

УДК 532.5.013.4

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕЛИЯ II

В. Г. НЕВОЛИН

(Пермь)

В данной работе в рамках двухжидкостной гидродинамики рассматривается устойчивость свободной поверхности сверхтекучей жидкости в переменном поле тяжести. Задача решается в линейной постановке методом преобразования Лапласа. Для смещения поверхности от положения равновесия получено интегродифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, решение которого ищется методом усреднения [6]. Показано, что возбуждение носит пороговый характер. Получены оценки для порога возбуждения.

При понижении температуры ниже 2.19° К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние (гелий II). При этом в нем возможно существование одновременно двух движений, каждое из которых связано со своей эффективной массой, так что сумма этих масс равна полной истинной массе жидкости. Одно из этих движений нормальное, т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной вязкой жидкости, другое сверхтекучее. В случае малых скоростей эти движения происходят без передачи импульса от одного другому [1–5].

Таким образом, задача о движении гелия II сводится к решению двух задач обычной гидродинамики – для идеальной и вязкой жидкостей [2–5].

1. Рассматривается горизонтальный слой несжимаемой сверхтекучей жидкости со свободной верхней границей. Слой движется около вертикальной оси с частотой ω по закону $a\cos\omega t$, причем амплитуда модуляции $a<1$. Декартова система координат выбрана так, что плоскость xy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, ось z направлена вертикально. В предположении малых скоростей движения жидкости нормальное и сверхтекучее движения разделяются и уравнения движения примут вид [2–5]

$$\rho_1\nabla\left[\frac{\mathbf{v}_1^2}{2}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right]+\rho_2\left[\frac{\partial\mathbf{v}_2}{\partial t}+(\mathbf{v}_2\nabla)\mathbf{v}_2\right]=-\nabla p+\eta\nabla^2\mathbf{v}_2+\rho\mathbf{g}(t)\tag{1.1}$$

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \mathbf{v}_1=\nabla\varphi_1,\quad \nabla\mathbf{v}_2=0$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 – сверхтекучая и нормальная плотности; $\rho=\rho_1+\rho_2$ – полная истинная плотность жидкости; $\mathbf{v}=\{u, v, w\}$ – скорость сверхтекучего движения (индекс 1) и нормального движения (индекс 2); η – коэффициент динамической вязкости; φ – потенциал скорости; $\mathbf{g}(t)=\{0, 0, -(1-b\cos\omega t)g\}$ – эффективное ускорение силы тяжести, $b=a\omega^2/g$ – безразмерная амплитуда модуляции, $\nabla=\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$.

Условия равновесия системы запишутся

$$\mathbf{v}_1{}^0=0,\quad \mathbf{v}_2{}^0=0,\quad p^0=-\rho(1-b\cos\omega t)gz\tag{1.2}$$

Здесь давление p отсчитывается от значения на поверхности.

2. Исследуем устойчивость равновесия (1.2) методом малых возмущений. Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости и давления соответственно $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, $(\alpha/\rho g^3)^{1/4}$, $(\rho g^3/\alpha)^{1/4}$, $(\alpha g/\rho)^{1/4}$ и $(\alpha\rho g)^{1/2}$, получим для возмуще-