МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1979

УДК 538.4:532.51.013.4

К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

А. И. ЖАКИН

(Харьков)

В неоднородных электрических полях при достаточно больших напряженностях электрического поля слабопроводящая жидкость теряет устойчивость и приходит в движение [1–4]. Причиной потери устойчивости и течения является кулоновская сила, действующая на объемный заряд, который образуется благодаря неоднородности электропроводимости жидкости [4–13]. Эта неоднородность может быть вызвана внешним разогревом [4–6], локальным повышением температуры от джоулева нагрева [2, 7, 8] и нелинейностью закона Ома [9–13]. В данной работе в отсутствие градиента температуры, создаваемого внешним источником, указано условие, при выполнении которого влиянием джоулева нагрева на устойчивость можно пренебречь. В предположении выполнения этого условия получен критерий устойчивости слабопроводящей жидкости, расположенной между сферическими электродами.

1. Рассмотрим два сферических, концентрично расположенных электрода радиусов R_1, R_2 ($R_1<R_2$), между которыми расположена слабопроводящая жидкость. Пусть электроды имеют одинаковые температуры и между ними поддерживается постоянная разность потенциалов U. Считаем, что проводимость среды зависит от температуры и напряженности электрического поля линейно $\sigma(T,E)=\sigma_0'(1+\beta E'+\alpha' T')$, причем поляризация линейна по полю $\mathbf{P}=K(\rho)\mathbf{E}$ [12–16], а зависимостью диэлектрической восприимчивости $K(\rho)$ от температуры и поля можно пренебречь [17]. Здесь

$$\beta=\frac{1}{\sigma_0'}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial E}\right)_T,\qquad \alpha'=\frac{1}{\sigma_0'}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_E$$

$$E'=E-\langle E\rangle,\quad E=|\mathbf{E}|,\quad T'=T-\langle T\rangle,\quad \beta\langle E\rangle\sim\beta E\sim\alpha' T'\ll 1 \tag{1.1}$$

где $\langle T\rangle$ — среднее значение температуры для равновесного состояния, $\langle E\rangle$ — значение напряженности электрического поля, при котором начинает сказываться нелинейность закона Ома. Будем также предполагать, что на границе металл — жидкость влиянием двойных слоев можно пренебречь [14].

Движение слабопроводящей поляризующейся жидкости описывается уравнениями электрогидродинамики [15, 16]

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla p'+\eta\Delta\mathbf{v}+q\mathbf{E} \tag{1.2}$$

$$p'=p+\rho\frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho}\frac{E^2}{2},\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi q,\quad \mathbf{E}=-\nabla\Phi$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0,\qquad \mathbf{j}=\sigma(E,T)\mathbf{E}+q\mathbf{v}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T\right)=\varkappa\Delta T+\sigma(E,T)E^2$$

Здесь η — динамическая вязкость, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, q — объемный заряд.

Граничные условия для системы уравнений (1.2) с учетом сделанных предположений будут иметь вид

$$\mathbf{v}=0,\quad T=T^{(0)}\equiv\langle T\rangle\quad (r=R_1,\ R_2);\ \Phi|_{r=R_1}=U,\quad \Phi|_{r=R_2}=0 \tag{1.3}$$

2. Равновесное состояние жидкости описывается системой уравнений, которые получаются из (1.2) при $\mathbf{v}\equiv 0$, $\partial/\partial t=0$, и граничными условиями (1.3).

Введем сферическую систему координат, начало которой поместим в центр симметрии. Решение, описывающее равновесное состояние, будем искать в виде

$$\mathbf{E}_0=(E_0(r),0,0),\quad T_0=T_0(r),\quad q_0=q_0(r)$$

Подставив эти выражения в уравнения равновесия, получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\sigma_0(1+\beta|E_0|+\alpha T_0')E_0]=0 \tag{2.1}$$

$$\varkappa\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT_0}{dr}\right)+\sigma_0(1+\beta|E_0|+\alpha T_0')E_0^2=0 \tag{2.2}$$

$$q_0=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_0) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon=1+4\pi K(\rho),\quad T_0'=T_0-\langle T\rangle,\quad \sigma_0=\frac{\sigma_0'}{\gamma},\quad \alpha=\frac{\alpha'}{\gamma}$$

$$\gamma=1-\beta\langle E\rangle$$

Уравнения (2.1), (2.2) вместе с граничными условиями (1.3) образуют граничную задачу, из которой определяются температура и электрическое поле, а уравнение (2.3) описывает распределение заряда в жидкости.

С учетом условий (1.1) методами теории возмущений [18] для равновесного состояния приближенно получим решение в следующем виде:

$$E_0=\frac{E_1R_1^2}{r^2}\left(1-\alpha T_0'\mp\mu\frac{R_1^2}{r^2}\right) \tag{2.4}$$

$$T_0'=\frac{\sigma_0E_1^2R_1^2}{2\varkappa}\left[-\frac{R_1}{R_2}+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{R_1}{r}-\frac{R_1^2}{r^2}\right] \tag{2.5}$$

$$q_0=\frac{\varepsilon E_1}{4\pi R_1}\left[\mu_1\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{R_1^2}{r^2}\pm 2\mu\frac{R_1^5}{r^5}\right] \tag{2.6}$$

$$E_1\equiv\frac{UR_2}{R_1(R_2-R_1)},\quad \mu_1=\frac{\alpha\sigma_0E_1^2R_1^2}{2\varkappa},\quad \mu=\beta E_1$$

где μ, μ_1 — малые параметры, а решение (2.4) — (2.6) получено с точностью до линейных членов по μ, μ_1. Верхний знак в выражениях (2.4), (2.6) берется при $U>0$, нижний — при $U<0$. Из (2.5) следует, что область максимального нагрева находится в окрестности сферической поверхности радиуса $r_*=2R_1R_2/(R_1+R_2)$, причем с уменьшением R_1 эта поверхность стягивается к центральному электроду. Однако максимальная температура нагрева при этом не увеличивается. Действительно, максимум функции (2.5) при любом сколь угодно малом R_1 ограничен

$$\max_{R_1\leqslant r\leqslant R_2} T_0'=T_0'|_{r=r_*}=\frac{\sigma_0E_1^2R_1^2}{2\varkappa}\left(-\frac{R_1}{R_2}+\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_2^2}\right)<\frac{\sigma_0U^2}{8\varkappa}$$

Этот факт может служить объяснением столь малого нагрева области у игольчатого электрода, несмотря на то что плотности тока у острия значительны [3].

Из (2.6) следует, что влияние джоулева тепла на распределение объемного заряда можно пренебречь, если

$$\frac{\alpha\sigma_0|U|}{\varkappa(1-R_1/R_2)}\ll\frac{4\beta}{R_1} \tag{2.7}$$

Это условие означает, что в области максимальной концентрации заряда ($r=R_1$) заряд, индуцированный температурной неоднородностью, значительно меньше заряда, индуцированного неоднородностью электрического поля.

В дальнейшем покажем (см. оценки в конце статьи), что с уменьшением радиуса внутреннего электрода R_1 критическое значение величины разности потенциалов $|U_*|$ также уменьшается, поэтому по крайней мере при $R_1\ll4\beta\varkappa/\alpha\sigma_0|U_*|$ в докритической области значений параметров неравенство (2.7) будет выполняться. В дальнейшем будем предполагать выполнение (2.7). В этом случае (2.4), (2.6) примут вид

$$E_0=\frac{E_1R_1^2}{r^2}\left(1\mp\mu\frac{R_1^2}{r^2}\right),\qquad q_0=\pm\frac{\varepsilon\beta E_1^2}{2\pi R_1}\frac{R_1^5}{r^5} \tag{2.8}$$

Из этих соотношений видно, что если на внутреннем электроде потенциал больше (меньше), чем на внешнем, то в межэлектродной области образуется заряд положительного (отрицательного) знака, плотность которого пропорциональна r^{-5}. Возникающая при этом кулоновская сила является причиной дестабилизации положения равновесия [12, 13].

3. Прежде чем перейти к рассмотрению устойчивости состояния равновесия, необходимо отметить следующее.

Из уравнения изменения импульсов (1.2) видно, что объемные поляризационные силы перераспределяют лишь давление в среде. Поэтому, если нет свободной поверхности, они не влияют на характер течения. Математически это означает, что полное давление в жидкости определяется после нахождения поля скоростей, т. е. при решении уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости давление можно исключить [19]. Поэтому в критерий устойчивости не должны входить параметры, характеризующие поляризационные силы. Так же как и в теории конвективной устойчивости несжимаемой жидкости [20], при отсутствии осложняющих факторов (вращение и т. д.) единственными силами, препятствующими развитию гидродинамических возмущений, являются силы вязкости. Таким образом, безразмерный критерий устойчивости должен зависить от параметров, характеризующих неоднородность заряда и величину поля, времени релаксации свободного заряда, вязкости жидкости и характерных размеров задачи.

При исследовании устойчивости равновесного состояния, описываемого соотношениями (2.8), будем пользоваться методом малых колебаний [21]. Представляя возмущенное состояние скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})e^{-\lambda t}$, давлением $p_0'+p(\mathbf{r})e^{-\lambda t}$ (p_0' — равновесное полное давление), напряженностью электрического поля $\mathbf{E}_0+\mathbf{e}(\mathbf{r})e^{-\lambda t}$, объемным зарядом $q_0+q(\mathbf{r})e^{-\lambda t}$, с учетом

(1.1) для возмущений из (1.2) получим следующие линеаризованные уравнения

$$-\lambda\rho\mathbf{v}=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+q\mathbf{E}_0,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{3.1}$$

$$\lambda q=\sigma_0\operatorname{div}\mathbf{e}+\frac{dq_0}{dr}v_r$$

$$\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi q,\quad \mathbf{e}=-\nabla\Phi$$

Граничные условия для скорости и возмущения потенциала электрического поля следуют из условий прилипания и постоянства потенциала на электродах

$$\mathbf{v}=0,\quad \Phi=0\quad (r=R_1,R_2) \tag{3.2}$$

Нетрудно доказать, что собственные значения λ краевой задачи (3.1), (3.2) вещественны. Действительно, умножая первое уравнение (3.1) на $\bar{\mathbf{v}}$, второе на $r^4\bar{q}$ и интегрируя по области $\Omega=\{r/R_1\leqslant r\leqslant R_2,\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\}$, получим

$$-\lambda\rho\int\limits_\Omega|\mathbf{v}|^2d\Omega=-\eta\int\limits_\Omega(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2d\Omega+E_1R_1^2\int\limits_\Omega r^{-2}qv_rd\Omega$$

$$\lambda\int\limits_\Omega r^4|q|^2d\Omega=\frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon}\int\limits_\Omega r^4|q|^2d\Omega\mp\frac{5\varepsilon\beta E_1^2R_1^4}{2\pi}\int\limits_\Omega r^{-2}qv_rd\Omega \tag{3.3}$$

Вычитая из (3.3) соответственно их комплексно-сопряженные величины, будем иметь

$$(\lambda-\bar{\lambda})\rho\int\limits_\Omega|\mathbf{v}|^2d\Omega=-E_1R_1^2I$$

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int\limits_\Omega r^4|q|^2d\Omega=\pm\frac{5}{2\pi}\varepsilon\beta E_1^2R_1^4I$$

$$I=\int\limits_\Omega r^{-2}(q\bar{v}_r-\bar{q}v_r)d\Omega$$

Умножая первое уравнение в этих выражениях на $(5/2\pi)\varepsilon\beta E_1R_1^2$ и беря сумму при $U>0$, разность при $U<0$ первого и второго уравнений, получим

$$(\lambda-\bar{\lambda})\left\{\frac{5}{2\pi}\varepsilon\beta|E_1|R_1^2\int\limits_\Omega|\mathbf{v}|^2d\Omega+\int\limits_\Omega r^4|q|^2d\Omega\right\}=0 \tag{3.4}$$

Так как выражение в скобках всегда положительно, то отсюда следует вещественность λ.

Таким образом, если жидкость теряет устойчивость вследствие нелинейности закона Ома, то на границе устойчивости не должны наблюдаться колебательные движения, тогда как в слое жидкости с постоянным градиентом температуры устойчивость теряется колебательным образом [4–6].

Учитывая, что на границе устойчивости $\lambda=0$, получим, что критическая разность потенциалов определяется из следующей краевой задачи на собственные значения относительно U

$$\eta\Delta\mathbf{v}-\nabla p=g(r)v_r\mathbf{r}^\circ,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{3.5}$$

$$\mathbf{v}=0\quad (r=R_1, R_2)$$

$$g(r)\equiv\frac{\varepsilon E_0(r)}{4\pi\sigma_0}\cdot\frac{dq_0(r)}{dr}$$

Будем искать собственные функции в виде

$$v_r=v_l(r)T_{0n}{}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right)$$

$$v_\pm=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi\pm iv_\theta)=v_l{}^\pm(r)T_{\pm 1n}^{\,l}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right)$$

$$p=p_l(r)T_{0n}{}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0\right)$$

где $T_{mn}{}^l(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ $(-l\leqslant m,\ n\leqslant l)$ — обобщенные сферические функции. Тогда по аналогии с [22] можно показать, что критическая разность потенциалов определяется из следующей краевой задачи на собственные значения относительно U

$$\eta D_l{}^2(rv_l)=-l(l+1)r^{-1}g(r)v_l,$$

$$v_l=\frac{dv_l}{dr}=0\qquad (r=R_1,R_2)$$

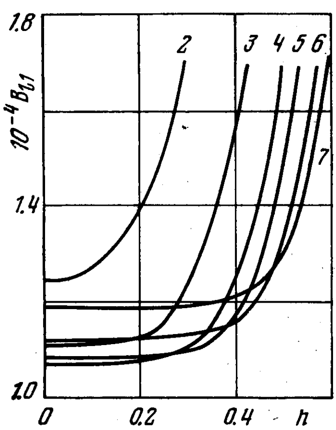
$$D_l\equiv\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}$$

Переходя к безразмерным переменным $\xi=r/R_1$, $v=rv_r\rho/\eta$, получим следующую задачу на собственные значения относительно безразмерного критерия устойчивости B

$$D_l{}^2v=\frac{5l(l+1)}{8\pi^2}B\xi^{-10}v \tag{3.6}$$

$$\left(B=\frac{\varepsilon^2\beta|E_1|^3}{\sigma_0\eta}\right)$$

$$v=\frac{dv}{d\xi}=0\qquad\left(\xi=1,h^{-1};\ h=\frac{R_1}{R_2}\right)$$



Перейдем к новым переменным $s=1/\xi$, $w(s)=v(1/s)$. Тогда задача (3.6) примет вид

$$L_ls^4L_lw=\frac{5l(l+1)}{8\pi^2}Bs^6w, \tag{3.7}$$

$$L_l=\frac{d^2}{ds^2}-\frac{l(l+1)}{s^2}$$

$$w=dw/ds=0\quad (s=1,h)$$

Можно доказать, что уравнение (3.7) имеет бесконечное множество собственных чисел

$$0<B_{l1}\leqslant B_{l2}\leqslant\ldots B_{lj}\leqslant\ldots$$

причем B_{l1} простые и с ростом h монотонно растут [22].

Вычисление первого собственного значения B_{l1} проводилось с использованием ЭВМ по схеме, предложенной в [22], с относительной погрешностью, меньшей 0.1%. На фигуре изображены зависимости B_{l1} от h. Кривым 2–7 соответствуют значения $l=2-7$. Нейтральная кривая $B_*=B_*(h)$ определяется из условия $B_*=\min\limits_{l=1,2,\ldots} B_{l1}(h)$. Число B_* определяет границу устойчивости, т. е. при $B<B_*$ жидкость находится в равновесии, при $B>B_*$ – приходит в движение. Отметим, что при $h<0.2$ наиболее опасным возмущениям соответствуют значения $l=4$. С увеличением h значения l, соответствующие критическим возмущениям, последовательно увеличиваются на единицу.

Полагая $h=0.1$, оценим порядок критической величины напряженности электрического поля E_{1*} вблизи внутреннего электрода для трансформаторного масла, для которого можно принять [13, 23] $\sigma_0=10^{-13}$ $(ом\cdot см)^{-1}$, $\varepsilon=2.25$, $\eta=0.2$ *пз*, $\beta=0.02$ *см/кв*. На границе устойчивости $B=B_*=10\,703$, откуда получаем

$$E_{1*}=\left(\frac{B_*\sigma_0\eta}{\varepsilon^2\beta}\right)^{1/3}=5.55\ кв/см$$

Так как $E_{1*}=U_*R_2/[R_1(R_2-R_1)]$, то с уменьшением R_1 при постоянном R_2 величина критической разности потенциалов U_* убывает.

Поступила 3 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г. А.* Некоторые гидродинамические явления, сопровождающие прохождение тока через изолирующие жидкости. ЖЭТФ, 1956, т. 30, вып. 2.
2. *Петриченко Н. А.* Зависимость скорости электрического ветра в изолирующих жидкостях от напряжения. Электронная обработка материалов, 1973, № 2.
3. *Михайлов А. А., Стишков Ю. К.* Некоторые электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Магнитная гидродинамика, 1977, № 2.
4. *Turnbull R. J.* Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. 1. Theory, 2. Experimental results. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 12.
5. *Болога М. К., Бурштейн И. Ф., Гросу Ф. П.* Неустойчивость термически неоднородного слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
6. *Саранин В. А.* О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
7. *Остроумов Г. А.* Изотермическое самодвижение жидкостей в электрическом поле. Электронная обработка материалов, 1970, № 2.
8. *Майбуров С. П., Остроумов Г. А.* Электрический ветер в жидкости и его реакция на острие. Электронная обработка материалов, 1967, № 4.
9. *Френкель Я. И.* К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках. ЖЭТФ, 1938, т. 8, вып. 12.
10. *Plumley H. J.* Conduction of electricity by dielectric liquid at high field strengths. Phys. Rev., Ser. 2, 1941, vol. 59, No. 2.
11. *Felisi N. J.* D. C. conduction in liquid dielectrics. pt 1, 2. Direct Current, 1971, vol. 2, No. 3, 4.
12. *Янтовский Е. И.* Об изотермической электроконвекции. 8-е Рижское сов. по магнитной гидродинамике. Тез. докл. т. 1, Рига, «Зинатне», 1975.
13. *Янтовский Е. И., Апфельбаум М. С.* О силе, действующей от игольчатого электрода на слабопроводящий жидкий диэлектрик, и вызываемых ею течениях. Магнитная гидродинамика, 1977, № 4.
14. *Остроумов Г. А.* Электрическая конвекция. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 5.
15. *Мелчер Дж. Р.* Электрогидродинамика. Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
16. *Рубашов И. Б., Бортников Ю. С.* Электрогазодинамика. М., Атомиздат, 1971.
17. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков (область слабых полей). М.– Л., Гостехиздат, 1949.
18. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
19. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
20. *Гершуни Г. З. Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
21. *Юдович В. И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
22. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
23. *Белецкий З. М., Рыженко В. И., Тополянский Е. Л.* Зависимость проводимости трансформаторного масла от напряженности электрического поля и температуры. Электротехника, 1974, № 4.