

## О ВЛИЯНИИ СМЕШЕНИЯ ДВУХ ПОТОКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ НА ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. Н. ЛАНЮК

(Москва)

Рассчитывается турбулентная зона смешения двух потоков вязкого и теплопроводного газа в сопле Лавали. Сравниваются результаты расчета интегральных характеристик неоднородных по полным параметрам потоков в сопле Лавали заданной геометрии, полученные в рамках моделей «слоистой гидравлики», «вязкой слоистой гидравлики» и «полного смешения без гидравлических потерь».

Рассмотрим стационарное, незакрученное течение вязкого теплопроводного газа с почти ступенчатым распределением полных параметров на входе в осесимметричном сопле Лавали заданной геометрии. При таком течении потоки газа с различными полными параметрами на входе в сопло разделены поверхностью, вблизи которой профили параметров течения задаются из теории пограничного слоя. В режиме записания, который будет исследоваться далее, течение в сужающейся части сопла и по крайней мере в начале его расширяющегося участка не зависит от давления окружающей среды. Интегральные характеристики сопла (расход газа  $G$ , импульс  $I$ , удельный импульс  $i=I/G$  и т. д.) зависят от распределения параметров на входе в сопло, а также от турбулентного перемешивания потоков в зоне смешения. Для анализа зависимости интегральных характеристик сопла от величины турбулентного смешения проводится сравнение значений этих характеристик, рассчитанных в рамках трех моделей. Модель «смешения без гидравлических потерь» предполагает полное выравнивание параметров исходного неоднородного потока в камере постоянной площади перед соплом с сохранением потоков массы, энергии и импульса. Модель слоистой гидравлики подробно описана в [1, 2]. Модель вязкой слоистой гидравлики будет описана в следующем пункте.

1. В основу модели вязкой слоистой гидравлики положены приближенные уравнения, совпадающие с уравнениями пограничного слоя с заранее неизвестным распределением статического давления по оси сопла. Для справедливости этой модели необходимо выполнение трех условий: а) малость углов наклона стенки сопла к оси  $x$ ; б) наличие невязкого слоя между зоной смешения и стенкой; в) малость толщины пограничного слоя на стенке сопла. В предельном случае пренебрежения эффектами вязкости и смешения эта модель переходит в модель слоистой гидравлики. Система уравнений, описывающая течение вязкого, теплопроводного газа в осесимметричном сопле в приближении пограничного слоя имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho u y}{\partial x} + \frac{\partial \rho v y}{\partial y} &= 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \epsilon y \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{d p}{d x} \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= u \frac{d p}{d x} + \frac{1}{y} \left( \frac{\rho \epsilon y}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \rho \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ h &= R c_p T, \quad p = R \rho T \end{aligned}$$

При замыкании системы (1.1) в [3] предложено уравнение для определения турбулентной вязкости  $\epsilon$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \rho \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + \alpha \rho \epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + u \xi \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Параметры  $\eta$ ,  $\alpha$  и  $\xi$  — эмпирические постоянные. Согласно рекомендациям [3] при расчетах было принято:  $\alpha=0.2$ ,  $\xi=0.7$ ,  $\eta=2$ .

Поперечная скорость  $v$ , как и в обычной теории пограничного слоя, определяется из уравнения неразрывности. Исключив из второго и третьего уравнений (1.1) производные от плотности и скорости по  $x$  и подставив найденные значения производных в первое уравнение (1.1), получим

$$(1.3) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + v \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho u} (M^2 - 1) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho u y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \epsilon y \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ - \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \epsilon y}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \rho \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)$$

Уравнение (1.3) линейно относительно  $v$ . Общее решение (1.3) при произвольном фиксированном  $x$  имеет вид

$$(1.4) \quad \frac{v(y_2)y_2}{u(y_2)} - \frac{v(y_1)y_1}{u(y_1)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y}{u} \left( \frac{1}{\rho u} (1 - M^2) \frac{dp}{dx} - \frac{1}{\rho u y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \epsilon y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \epsilon y}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \rho \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) dy$$

Здесь  $y_1$  и  $y_2$  — пределы интегрирования.

Полагая в (1.4)  $y_1=0$ ,  $y_2=y_w$  и учитывая, что на стенке  $v(y_w)/u(y_w) = dy_w/dx$ , получим уравнение для определения продольного градиента давления

$$(1.5) \quad \frac{dp}{dx} = \kappa p \left( y_w \frac{dy_w}{dx} - \Phi \right) / \int_0^{y_w} (M^2 - 1) y dy$$

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $M$  — число Маха. При выводе (1.5) пренебрегалось наличием пограничного слоя на стенке сопла.

По определению

$$(1.6) \quad \Phi = \frac{1}{p} \int_0^{y_w} \left( - \frac{RT}{u^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \epsilon y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\rho \epsilon y}{c_p u} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \epsilon y}{Pr} \frac{\partial RT}{\partial y} \right) \right) dy$$

В знаменателе (1.5) стоит выражение, обращение в нуль которого есть условие «критичности» слоистого потока; приравнявая его нулю, в модели слоистой гидравлики находят статическое давление в сечении минимальной площади сопла. В числителе (1.5) стоит производная от эффективной площади сопла, которая учитывает вытесняющее воздействие зоны смешения на течение в сопле. Из анализа (1.5) также следует, что особая точка этого уравнения при учете вязкости и теплопроводности газа расположена в общем случае либо выше, либо ниже по течению, чем сечение минимальной площади сопла (в зависимости от знака  $\Phi$ ).

Из (1.5) следует, что при отсутствии вязкости и теплопроводности ( $\Phi=0$ ) особая точка уравнения (1.5) находится в сечении минимальной

площади сопла. Также ясен физический смысл функции  $\Phi$ , которая равна производной от площади «тела вытеснения» зоны смешения по  $x$ .

Рассмотрим необходимые условия знакоопределенности функции  $\Phi$ . Интегрируя по частям первое и третье слагаемые в (1.6) и учитывая, что производные от параметров течения по  $y$  на границах зоны смешения равны нулю, получим

$$(1.7) \quad \Phi = \frac{1}{p} \int_0^{y_w} \left( \frac{\rho \varepsilon y}{c_p u} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \left( 1 - \frac{2h}{u^2} \right) + \frac{1}{u} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) dy$$

Определим полную энтальпию соотношением

$$(1.8) \quad H(y) = u^2(y)/2 + h(y) = u^2(y)/2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{(1-1/\kappa)} S(y)^{1/\kappa}$$

Здесь и далее  $S(y) = p/\rho(y)^\kappa$  — неотрицательная функция энтропии. Дифференцируя левую и правую части (1.8) по  $y$ , получим

$$(1.9) \quad \frac{\partial H}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h}{\kappa S} \frac{\partial S}{\partial y}$$

Если в сопле смешиваются два потока с одинаковыми энтальпиями торможения и различными полными давлениями, то

$$(1.10) \quad \frac{\partial H}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} \ll \frac{\partial S}{\partial y}$$

Учитывая (1.10), из (1.9) получим

$$(1.11) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{h}{\kappa u S} \frac{\partial S}{\partial y}$$

Используя (1.7) и (1.11), найдем для рассматриваемого частного случая смешения двух потоков

$$(1.12) \quad \Phi = - \frac{1}{p} \int_0^{y_w} \frac{\rho \varepsilon y h^2}{\kappa c_p u^4 S^{21}} \left( \frac{2h}{u^2} + \frac{1}{Pr} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 dy < 0$$

Из (1.12) следует, что производная от площади тела вытеснения зоны смешения двух потоков с различными полными давлениями и одинаковыми энтальпиями торможения всегда отрицательна. В рассматриваемом случае особая точка уравнения (1.5) всегда смещена вверх по потоку относительно сечения минимальной площади сопла.

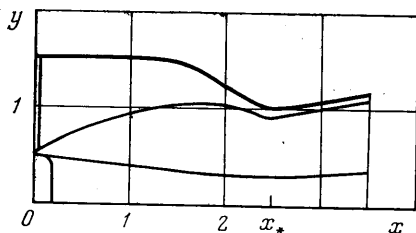
Если в сопле происходит смешение двух потоков с одинаковыми полными давлениями и разными энтальпиями торможения, то можно аналогично предыдущему показать, что в этом случае

$$(1.13) \quad \Phi = \frac{1}{p} \int_0^{y_w} \frac{\rho \varepsilon y}{2 c_p H^2 u} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{h}{Pr} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 dy > 0$$

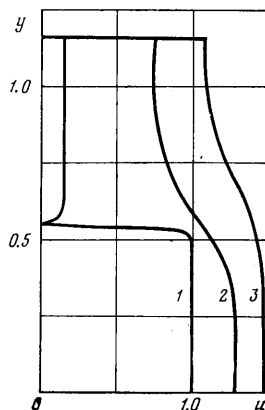
Из (1.13) следует, что производная от площади тела вытеснения зоны смешения двух потоков с различными энтальпиями торможения и одинаковыми полными давлениями по  $x$  всегда положительна, а особая точка уравнения (1.5) в этом случае всегда смещена вниз по потоку относительно

но сечения минимальной площади сопла. Если в сопле происходит смешение двух потоков с различными полными давлениями и энтальпиями торможения, то  $\Phi$  может иметь любой знак в зависимости от соотношения между величинами неоднородностей полных параметров.

2. При проведении расчетов турбулентной зоны смешения в сопле был использован модернизированный вариант программы расчета смешения турбулентных струй, предложенной в [4]. Система уравнений (1.1) и (1.5) численно решалась с помощью неявной разностной схемы первого порядка точности. Все расчеты проводились для совершенного газа с  $\kappa=1.4$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Последовательное измельчение шагов по осям и экстраполяция значений  $G$  на нулевой шаг расчетной сетки позволили установить, что при шаге  $h_y$  по  $y$ , равном 0.01 (при таком  $h_y$  проводилось большинство расчетов), расход в сечении минимальной площади определялся с точностью 0.2–0.3%.

Расчитывались течения газа в сопле, контур которого образован плавно сопрягающимися отрезками прямых и дуг окружностей. Радиус сечения минимальной площади сопла принят за единицу линейного размера. Сопло имело следующие геометрические характеристики: радиус кривизны контура в сечении минимальной площади 0.25, полуугол сужения дозвуковой части  $30^\circ$ , полуугол раскрытия сверхзвуковой части  $10^\circ$ , степень поджатия (по площади) дозвуковой части 2.25.

Плотность, скорость и статическое давление газа на оси в сечении входа в сопло приняты за единицу скорости, плотности и статического давления. Расход однородного потока, энтропийная функция и энтальпия торможения которого равны средним по расходу значениям  $S$  и  $H$ , принят за единицу расхода. Удельный импульс вышеуказанного однородного потока в сечении минимальной площади равен  $(\kappa+1)/\kappa$ .

Были выполнены расчеты двух различных течений газа с почти ступенчатым распределением полных параметров на входе в сопло Лавала заданной геометрии. При таких течениях разрыв  $S$  и  $H$  происходит при одном и том же значении функции тока  $\psi_a$  (двухслойное течение газа в сопле).

В этом случае распределения  $H(\psi)$  и  $S(\psi)$  в сечении входа в сопло, кроме пограничных слоев на разделяющей поверхности, толщины которых  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , имеют вид

$$H(\psi) = H_1, \quad S(\psi) = S_1, \quad 0 < \psi < \psi_a$$

$$H(\psi) = H_2, \quad S(\psi) = S_2, \quad \psi_a < \psi < 1$$

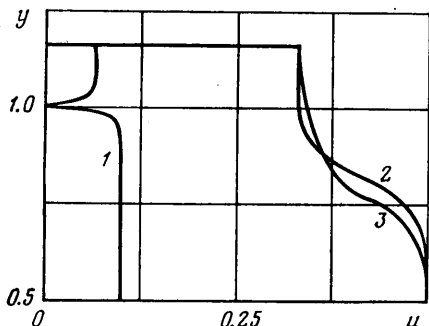
Отметим, что  $\psi=0$  на оси и  $\psi=1$  на стенке сопла.

Первый вариант рассчитанного течения характеризовался на входе в сопло следующими параметрами:  $H_1 = 1.125 H_0$ ,  $H_2 = 0.876 H_0$ ,  $S_1 = S_2 = S_0$ ,  $\psi_a = 0.5$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.025$  (здесь и далее  $H_0 = (\kappa + 1)/2(\kappa - 1)$ ,  $S_0 = 1/\kappa$  — средние по расходу значения энтальпии торможения и энтропийной функции). При этом отношение полных давлений  $p_{01}/p_{02} = 2.39$ . Течение с таким распределением полных параметров без учета начальных пограничных слоев рассчитывалось в [5] в рамках модели идеального газа.

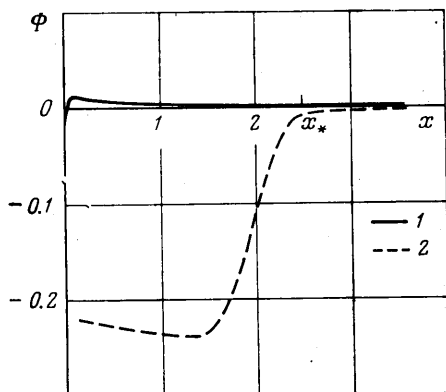
Во втором варианте расчета были выбраны следующие значения параметров течения на входе в сопло:  $H_1 = 1.595 H_0$ ,  $H_2 = 0.678 H_0$ ,  $S_1 = 1.925 S_0$ ,  $S_2 = 0.581 S_0$ ,  $\psi_a = 0.35$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.05$ . В этом случае  $p_{01}/p_{02} = 1$ .

Расчет первого варианта течения проводился при одном значении турбулентной вязкости на входе в сопло  $\epsilon_+ = 0.002$ , второй вариант рассчитывался при  $\epsilon_+ = 0$  и  $0.002$ .

На фиг. 1 изображены профиль скорости на входе в сопло и положение границ зоны смешения для первого варианта течения. За границы зоны



Фиг. 3



Фиг. 4

смешения условно приняты кривые, на которых параметры течения отличаются от постоянных по  $y$  значений не более чем на  $0.002$ .

На фиг. 2 линиями 1, 2 и 3 представлены зависимости продольной скорости  $u = u(y)$  в сечениях входа, минимальной площади и выхода сопла первого варианта течения.

На фиг. 3 линией 1 изображен профиль  $u = u(y)$  второго варианта течения на входе в сопло, а линиями 2 и 3 — профили  $u = u(y)$  этого варианта в сечении выхода для  $\epsilon_+ = 0$  и  $0.002$ .

В результате расчета первого варианта течения по модели слоистой гидравлики с учетом наличия пограничных слоев на входе в сопло были получены следующие значения интегральных характеристик:  $G = 0.842$ , удельный импульс на срезе сопла  $i = 1.891$ . При расчете этого варианта по методике данной работы было получено  $G = 0.837$ ,  $i = 1.881$ , тогда как из расчета по модели полного смешения в канале постоянного сечения перед соплом следует:  $G = 0.757$ ,  $i = 1.858$ .

В результате расчета второго варианта течения в рамках модели слоистой гидравлики получено  $G = 1.015$ ,  $i = 1.822$ , тогда как модель, используемая в этой работе, для  $\epsilon_+ = 0.002$  дает  $G = 1.010$ ,  $i = 1.827$ . Из расчетов по модели полного смешения в данном случае следует:  $G = 0.998$ ,  $i = 1.858$ .

Отметим, что интегральные характеристики второго варианта для случаев  $\varepsilon_+ = 0$  и  $0.002$  отличались на  $0.3-0.4\%$ , тогда как данный метод расчета имеет точность по интегральным характеристикам  $0.2-0.3\%$ .

Из вышеизложенного видно, что использование гипотезы полного смешения неоднородных потоков в камере постоянной площади перед соплом с сохранением расхода, энергии и импульса приводит к заметным (несколько процентов) ошибкам в вычислении основных интегральных характеристик сопла. Аналогичные ошибки модели слоистой гидравлики (с учетом наличия пограничных слоев на входе в сопло) составляют в тех же случаях несколько десятых процента.

На фиг. 4 линией 2 изображены зависимость  $\Phi = \Phi(x)$  для первого варианта течения, а линией 1 — аналогичная зависимость для второго варианта при  $\varepsilon_+ = 0.002$ .

Из анализа данных фиг. 4 следует, что в первом варианте  $\Phi < 0$  и  $\Phi \sim 10^{-3}$  в расширяющейся части сопла, тогда как во втором варианте  $\Phi > 0$  везде, кроме небольшой области вблизи сечения  $x=0$  (из-за наличия начальных пограничных слоев) и  $\Phi \sim 10^{-3}$  в расширяющейся части. В обоих рассчитанных вариантах площадь тела вытеснения в расширяющейся части постоянна с точностью до  $10^{-3}$ .

Автор благодарен А. Н. Крайко за руководство работой, А. Н. Секундову за полезные обсуждения, И. П. Смирновой и А. Б. Лебедеву за передачу программы для ЭВМ.

Поступила  
7 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зимонт В. Л. О величине импульса сопла при неравномерных газодинамических параметрах потока. Изв. вузов, Авиац. техн., 1970, № 2.
2. Крайко А. Н., Ланюк А. Н. О влиянии неравномерностей полей полной энтальпии и энтропии на интегральные характеристики сопла Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
3. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М., «Машиностроение», 1975.
4. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
5. Ланюк А. Н. О влиянии двумерности течения газа со ступенчатым распределением полных параметров на интегральные характеристики сопла Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 3.