

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОЙ РЕШЕТКИ
СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
ПРИ ДОЗВУКОВОЙ «НОРМАЛЬНОЙ» КОМПОНЕНТЕ
НА РЕЖИМАХ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ СКАЧКАМИ

А. Б. БОГОД, А. Н. КРАЙКО, Е. Я. ЧЕРНЯК

(Москва)

Рассматривается обтекание решетки плоских заостренных профилей сверхзвуковым потоком невязкого и нетеплопроводного газа при дозвуковой нормальной к фронту решетки компоненте вектора скорости набегающего потока. Исследование ограничено безотрывными режимами с присоединенными к передним кромкам профилей ударными волнами и достаточно густыми решетками, для которых характеристики или ударные волны, идущие от задних кромок, не попадают в область перед решеткой. В таких случаях условия за решеткой не оказывают влияния на поток перед ней. В этом смысле течение в решетке, как и в сопле Лавала на сверхкритических перепадах, является «запертым». В плоскости годографа запертым режимам обтекания решетки отвечают векторы скорости набегающего потока, лежащие на некоторой линии (см., например, [1-3]), которая строится в процессе решения задачи. Это свойство получило название «направляющего воздействия» решетки на набегающий поток. Заметим, что запертыми могут быть и режимы обтекания решетки с отходящими скачками, если их отход обусловлен затуплением профилей.

Ниже предложен метод, который для режимов с присоединенными скачками позволяет рассчитывать все поле течения, в том числе волновую структуру на больших расстояниях от фронта решетки, а также приведены некоторые результаты, полученные с помощью предложенного метода. Рассмотрение режимов с присоединенными скачками, анализ которых наиболее прост, во-первых, интересно само по себе и, во-вторых, является этапом на пути создания методов расчета и последующего исследования решеток на произвольных режимах.

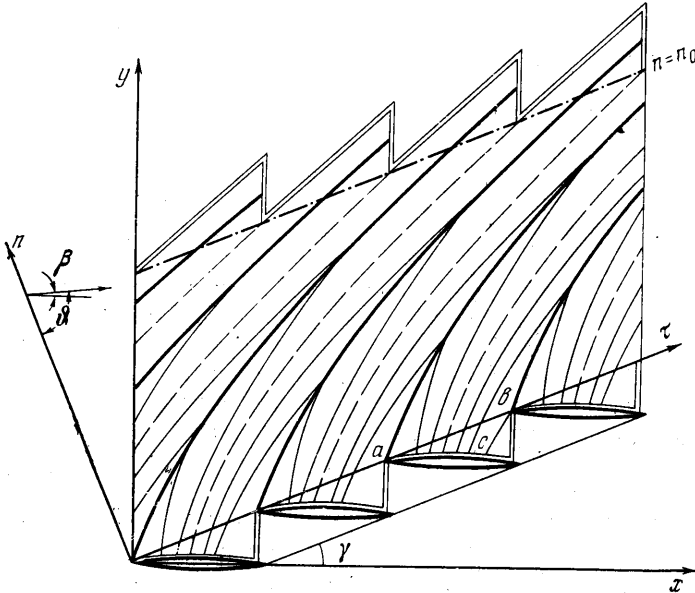
1. Схема обтекания решеток на произвольных режимах представлена на фиг. 1. На ней толстыми и тонкими сплошными линиями даны соответственно ударные волны и c^+ -характеристики (характеристики первого семейства), а штрихами — так называемые «нейтральные» характеристики того же семейства. Уходя на бесконечность, они отделяют c^+ -характеристики, приходящие на соседние скачки уплотнения. Смысл двойных линий будет объяснен в следующем пункте. Введем две прямоугольные системы координат. Ось x системы τn направим вдоль фронта решетки. Ориентацию оси x второй системы выберем так, чтобы проекция u вектора скорости газа V на нее во всей рассматриваемой области превышала скорость звука a . Трансзвуковые течения, для которых такой выбор невозможен, из дальнейшего анализа исключаются. При любом n , например, на штрих-пунктирной прямой $n=n_0$, которая предполагается отнесенной на достаточно большое расстояние от фронта, течение периодически по τ с периодом решетки. Последний возьмем за единицу длины. Из-за нелинейных эффектов поток при $n \rightarrow \infty$ выравнивается. Параметрам равномерного набегающего потока припишем индекс ∞ .

Пусть p — давление, ρ — плотность и $V=|V|$; число Маха M и угол Маха α введены обычным способом, а ϑ — угол, образуемый вектором V с отрицательным направлением оси n . Все величины безразмерные, при-

чем в качестве масштабов измерения скорости (а также и скорости звука), плотности и давления возьмем соответственно критические величины a_∞^* , ρ_∞^* и $\rho_\infty^* a_\infty^{*2}$. Тогда согласно [4, 5] для совершенного газа с показателем адиабаты κ интенсивность ударных волн в «дальнем поле» определяется формулой

$$(1.1) \quad \frac{\delta p}{\delta p_0} = \left[1 + \frac{(1+\kappa) \operatorname{tg} \alpha_\infty}{2\rho_\infty a_\infty^2 \cos^2(\vartheta + \alpha)_\infty} (n - n_0) \delta p_0 \right]^{-1}$$

Здесь $\delta p > 0$ — перепад давления на скачке, а $\delta p_0 = \delta p(n_0)$. Данная формула применима при описании дальнего поля на всех режимах и справед-



Фиг. 1

лива при таких n_0 и $n > n_0$, для которых скачки становятся достаточно слабыми. Кроме (1.1) справедливы равенства

$$(1.2) \quad 2I \equiv 2i + V^2 = 2I_\infty, \quad s = s_\infty, \quad L \equiv \vartheta + \Phi(V) = L_\infty$$

$$\left(\Phi(V) = \int_1^V \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{V} dV \right)$$

в которых i и s — удельные энтальпия и энтропия — известные функции p и ρ , а I и L — полная энтальпия и «левый» инвариант Римана. Первое равенство (1.2) — условие изэнергетичности — справедливо во всем потоке и выполняется точно. Второе и третье равенства выполняются только в дальнем поле и при каждом n справедливы лишь с точностью до δp включительно [5], так как в бесконечной последовательности затухающих скачков s и L на самом деле изменяются на величины порядка $[\delta p(n)]^2$. В пределах указанной точности (1.2) — интегралы уравнений течения, причем между каждой парой ударных волн реализуется течение типа простой волны с прямолинейными c^+ -характеристиками. Последние, расходясь веером, в конце концов пересекаются с одной из ударных волн, огра-

ничающих каждую полосу. Из тех же уравнений течения в дальнем поле

$$(1.3) \quad p(n, \tau) = p_{\infty} + [\tau^{\circ}(n) - \tau] \delta p(n)$$

где $\delta p(n)$ находится из (1.1), а $\tau = \tau^{\circ}(n)$ — уравнение нейтральной характеристики. В дальнем поле нейтральные характеристики и ударные волны — параллельные прямые, образующие с отрицательным направлением оси n угол $(\theta + \alpha)_{\infty}$. В силу выбора характерного линейного размера на ограничивающих каждую полосу ударных волнах $\tau^{\circ}(n) - \tau = \pm 1/2$ для левой и правой волн соответственно. Так как в дальнем поле параметры потока близки к своим невозмущенным значениям, то их распределения с той же точностью, что и (1.2), пропорциональны распределениям разности $p - p_{\infty}$. Соответствующие коэффициенты пропорциональности легко находятся из (1.2) и вычисляются через параметры набегающего потока.

Все сказанное о дальнем поле справедливо на всех режимах течения, причем согласно (1.1) — (1.3) все распределения параметров при известном набегающем потоке полностью определяются значением δp_0 . Последнее находится из расчета ближнего поля, перекрывающегося с дальним. Для запертых режимов, для которых из-за направляющего действия решетки один параметр набегающего потока заранее неизвестен, расчеты ближнего поля и набегающего потока должны вестись одновременно. Связь соответствующих параметров дается условиями сохранения потоков массы и двух компонент количества движения, которые одинаковы при всех $n \geq 0$, в частности при $n = 0$ и ∞ . Заметим, что постоянство потока энергии при этом следует из сохранения потока массы и первого равенства (1.2). Кроме того, постоянство всех перечисленных выше потоков для $n > n_0$ с точностью до δp включительно при любых достаточно малых δp_0 есть следствие равенств (1.1) — (1.3).

2. Перейдем теперь к общей схеме численного решения всей задачи. Для расчета ближнего поля применим установление по x в области между двумя «пилообразными» границами, «параллельными» фронту решетки. Нижняя граница составлена из отрезков верхних контуров профилей, в случае необходимости достаточно произвольным способом гладко продолженных за их задние кромки, и из вертикалей $x = \text{const}$, соединяющих «спинку» и кромку соседних профилей. «Зубья» верхней «пилы» составлены отрезками тех же вертикалей и участками «нейтральных» характеристик. На фиг. 1 обе границы показаны двойными линиями, причем в согласии со сказанным выше предполагается, что верхняя граница лежит в дальнем поле. Поэтому параметры на ее наклонных участках не возмущены, а сами эти участки прямолинейны.

Поскольку исследуемый поток x -сверхзвуковой, то счет удобно вести слоями $x = \text{const}$. В процессе счета высота рассчитываемой области в пределах каждого периода решетки монотонно увеличивается. При достижении передней кромки очередного профиля она скачкообразно уменьшается и снизу и сверху на конечную величину, а затем вновь начинает расти. На профиле выполняется условие непротекания. На наклонных участках верхней границы поток, как уже отмечалось, не возмущен. На вертикальных участках обеих границ все параметры получаются в процессе счета, и, следовательно, какие-либо дополнительные условия не нужны. Так как один из параметров набегающего потока заранее неизвестен, то необходимы дополнительные итерации, которые проводились при достижении передней кромки каждого следующего профиля. При этом I_{∞} , s_{∞} и V_{∞} задавались в качестве условий задачи, а угол θ_{∞} находился по расходу между двумя профилями в только что рассчитанной области. Разумеется, θ_{∞} можно находить и по потоку любой из компонент количества движения, протекающему через фронт решетки между теми же профилями. С точностью до погрешностей счета и выбора верхней границы результаты всех трех способов вычисления θ_{∞} после «установления» должны совпадать. Сказанное есть следствие уравнений, выполняющихся и используемых при расчете в дальнем и в ближнем полях.

Скорость установления зависит от выбора начальных распределений параметров в некотором начальном сечении $x = \text{const}$ и начального приближения θ_{∞} . Так как обычно интенсивность скачков мала даже на передних кромках профилей, то для

расчета начальных распределений и Φ_∞ применим соотношения (1.1)–(1.3) и приближенный метод «простой волны», использованный в [6], где с его помощью определялось направляющее воздействие решетки и возрастание энтропии (см. также [3]). В основе метода простой волны лежит использование в треугольнике abc формул (1.2) с некоторыми заранее неизвестными отличными от s_∞ и L_∞ константами s_0 и L_0 . Рассчитав по (1.2) течение в abc , которое в данном приближении есть простая волна с прямолинейными c^+ -характеристиками (отсюда и название метода), можно затем найти s_0 , L_0 и Φ_∞ из условий совпадения при $n=0$ и ∞ потоков массы и двух компонент количества движения. Применим далее всюду при $n \geq 0$ соотношения, справедливые, строго говоря, лишь для дальнего поля. Тогда, положив $\delta r_0 = \delta r(0) = r_0 - r_0^*$ и $n_0 = 0$, найдем из (1.1)–(1.3) распределения всех параметров в сечении $x=0$, которые и примем за начальные.

Для дальнейшей реализации процесса установления по x в рамках намеченной выше итерационной процедуры пригодна любая «маршевая» численная схема. Ниже для этой цели применялась схема [7], позволяющая, вообще говоря, вести сквозной счет скачков (см. также [8]). Тем не менее в данной задаче аккуратный сквозной счет скачков весьма малой интенсивности требует использования слишком большого числа расчетных ячеек и сопряжен с неоправданно большими затратами машинного времени. Поэтому в рассматриваемом случае все скачки «выделялись». После того как с заданной точностью Φ_∞ и параметры потока перестают изменяться (по τ), дальнейшее поле рассчитывается по (1.1)–(1.3). При этом в качестве r_0 и n_0 берутся соответствующие величины для ближайшего к верхней границе скачка. Перекрывание дальнего и ближнего полей, которое всегда имело место благодаря выбору положения верхней границы, обеспечивало их естественный переход друг в друга.

Прежде чем обратиться к результатам расчетов, отметим, что идея установления по x с использованием метода характеристик недавно была реализована в [9]. Основное внимание в этой работе уделялось выяснению влияния малого затупления передней кромки на направляющее действие решетки и на увеличение энтропии, а также сравнению с приближенным методом [6]. В то же время, например, структура течения в дальнем поле в [9] не рассчитывалась. Кроме того, в [9] расчет велся в приближении модели полубесконечной решетки, обтекаемой равномерным потоком.

3. Описанный выше метод был применен для расчета обтекания решеток из двояковыпуклых симметричных профилей, образованных дугами окружностей радиуса r . Если b — длина хорды профиля, а $\gamma \leq \pi/2$ — угол между фронтом решетки и направлением хорды (угол установления), то величины r , b и γ полностью определяют геометрию такой решетки (напомним, что за характерный размер взят шаг решетки, т. е. расстояние между кромками соседних профилей).

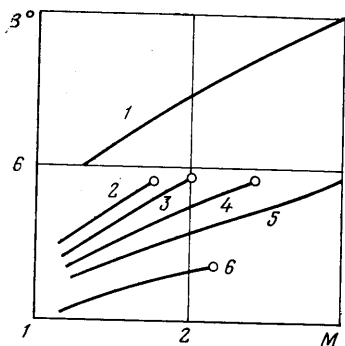
При расчете кроме самой решетки нужно задать размер рассчитываемой области или число скачков N , пересекающих каждый ее отрезок $x = \text{const}$, и число ячеек разностной сетки k между соседними скачками. Числа N и k выбирались в процессе специальных методических расчетов и в типичном варианте составляли: $N=6$, $k=12$. В таком случае установление с погрешностью, лежащей вне возможностей графического представления результатов на следующих ниже фигурах, достигалось после расчета 6–10 периодов решетки и занимало 1–3 мин на ЭВМ БЭСМ-6 (программа составлена на АЛГОЛе).

Часть результатов для совершенного газа с $\kappa=1.4$ представлена на фиг. 2–5.

Фиг. 2 и 3 демонстрируют направляющее действие решеток с $b=1$ и разными r и γ . На фигурах даны зависимости от M_∞ угла атаки $\beta_\infty = \Phi_\infty + \gamma - \pi/2$, который вектор скорости набегающего потока образует с направлением хорды профиля. Положительным β_∞ отвечает поворот от направления хорды к направлению вектора скорости против часовой стрелки. Сплошные кривые на фиг. 2 и 3 получены по описанному методу и могут рассматриваться как точные. На фиг. 2–4 цифрами 1–6 пронумерованы кривые, соответствующие следующим значениям r и γ : $r=2.5$, $\gamma=30^\circ$; 5, 40° ; 5, 35° ; 5, 30° ; 5, 25° ; 10, 30° . На фиг. 3 в увеличенном масштабе наряду с точными результатами штрихами построены аналогичные кривые, рассчитанные по методу простой волны [6]. Они весьма близки к сплошным кривым и вполне характеризуют соответствующее отличие и для других

г. Близость сплошных и штриховых кривых обусловлена малой интенсивностью скачков, образующихся на режиме с присоединенными ударными волнами. Заметим, что отличие того же порядка, как и на фиг. 3, получено в одном примере, рассчитанном в [9].

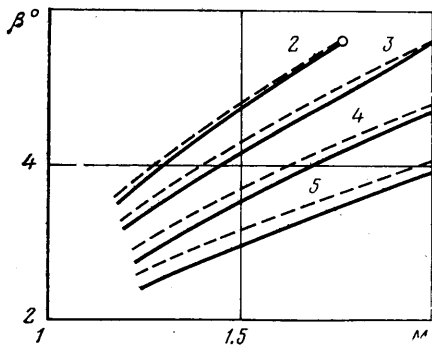
Рост энтропии или потери полного давления на режимах с присоединенными ударными волнами также малы. Это видно из фиг. 4, на которой σ — отношение среднего полного давления на фронте решетки к полному давлению набегающего потока. Смысл сплошных и штриховых кривых на фиг. 4 тот же, что и на фиг. 3. На рассматриваемых режимах для каждой решетки с ростом M_∞ нормальная к фронту решетки компонента Маха $M_n = V_n/a$ увеличивается, становясь при некотором M_∞ единицей. Значению $M_n = 1$ отвечает направление вектора скорости по касательной к верхней образующей профиля в его передней точке (это определяет и «предельное» значение M_∞). На фиг. 2 и 3 «предельные» точки даны кружками. Нижняя образующая профиля обтекается в рассчитанных примерах с присоединенным скачком, течение слева от которого на предельный M_∞ —



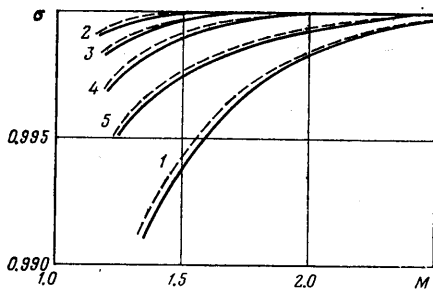
Фиг. 2

простая волна с прямолинейными c^+ -характеристиками.

Для типичного случая ($b=1, r=2.5, \gamma=30^\circ, M_\infty=1.35$) фиг. 5 показывает эволюцию потока по мере удаления от фронта решетки и, кроме того, позволяет оценить возможности расчета всего течения с помощью комбинации метода простой волны и асимптотических формул (1.1)–(1.3). Напомним, что именно эта комбинация используется для расчета началь-



Фиг. 3

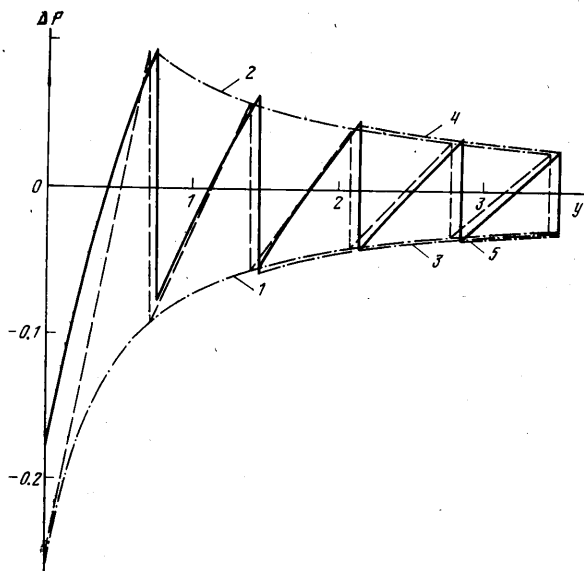


Фиг. 4

ного приближения. Пилообразные кривые на фиг. 5, затухающие по амплитуде, дают изменение $\Delta p = (p - p_\infty) / p_\infty$ по y вдоль прямой $x = \text{const}$, выходящей с передней кромки. Сплошная кривая — точный результат, штриховая — результат применения описанной выше комбинации приближенных методов.

Кроме того, на фиг. 5 приведены поочередно снизу и сверху штрихпунктирные кривые, которые согласно формуле (1.1) с $n = y \cos \gamma$ описывают асимптотическое затухание скачков. В верхней полуплоскости $\Delta p = (p_+ - p_\infty) / p_\infty$, а в нижней $\Delta p = (p_- - p_\infty) / p_\infty$, где индексы «минус» и «плюс» приписаны параметрам соответственно до и после скачка. Цифра около кривой указывает номер скачка (единица приписана скачку на кромке профиля), начиная с которого применялась эта формула. Полагалось, что в сечении соответствующего скачка (при $n = n_0$) $p(y_0) =$

$=p_{\infty} + \delta p(y_0)/2$, где $\delta p(y_0)$ — точная разность давления на скачке. Вблизи кромки, когда повышение p за скачком и его понижение перед скачком не совпадают ($\Delta p_+ \neq -\Delta p_-$), начальные точки штрихпунктирных кривых не совпадают с вершинами «зубьев пилы». С ростом n_0 этот эффект становится незаметным, а сами штрихпунктирные кривые быстро сходятся, показывая, что в рассмотренной задаче дальнее поле на самом деле начинается весьма близко от фронта решетки.



Фиг. 5

В заключение авторы благодарят М. Я. Иванова за помощь в модернизации программы расчета сверхзвукового потока [7], Г. Ю. Степанова за полезные замечания и Е. В. Буганову и В. А. Вострецову за помощь в оформлении работы.

Поступила
 26 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин, М., Физматгиз, 1962.
2. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М., «Машиностроение», 1967.
3. Lichtfuss H. J., Starcken H. Supersonic cascade flow. In: Progress Aerospace Sci., vol. 15. Oxford e. a. Pergamon Press, 1974.
4. Fink M. R. Shock wave behaviour in transonic compressor noise generation. Paper ASME, 1971, No. GT-7.
5. Крайко А. Н., Осипов А. А. Затухание периодической последовательности слабых ударных волн в каналах со «звукопоглощающими» стенками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
6. Lawaszesk O. K. Calculation of the flow properties up and downstream of and within a supersonic turbine cascade. Pap. ASME, 1972, No. GT-47. (Рус. перев. Расчет сверхзвукового течения через турбинную решетку. Экспресс-информация. ВИНТИ. Сер. Поршневые и газотурбинные двигатели. 1973, № 3).
7. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I. Ж. Вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
8. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Р. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
9. York R. E., Woodard H. S. Supersonic compressor cascades — an analysis of the entrance region flow field containing detached shock waves. Trans. ASME, ser. A., J. Engng Power, 1976, vol. 98, No. 2.